This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

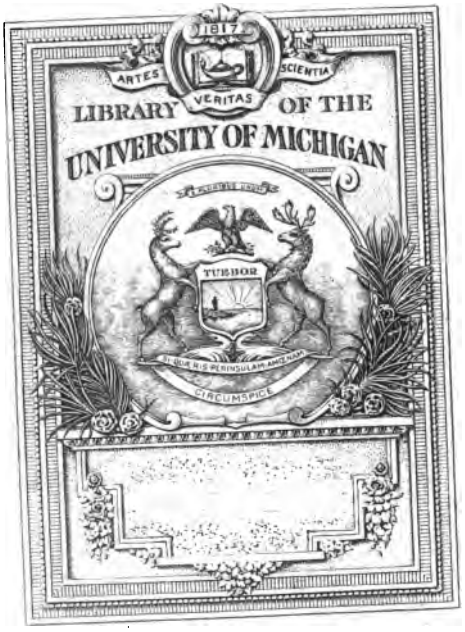
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
303
.F35

SAGGIO

DI

CALCOLO SUBLIME

DI

GABRIELE PERGOLA

PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELLA REGIA
UNIVERSITA' DI NAPOLI

PER USO DEL SUO STUDIO PRIVATO.

NAPOLI
TIPOGRAFIA SANGIACOMO
Largo del Castello accosto il Palazzo dei Reali Ministeri
1840.

QA
303
.F35

b. Com.
aglione.
16-28
615

PREFAZIONE.

Un' opera di Calcolo sublime, che le Teoriche tutte di tal parte dell' Analisi moderna contenga, riesce assai voluminosa, e spaventevole a coloro, che allo studio di essa si destinano, non col pensiere di voler professare le matematiche, ma a solo oggetto di utilmente applicarle a qualche mestiere. Onde volendo noi giovare alla più parte di que' giovani, che delle matematiche debbono far uso nelle applicazioni all' Architettura, ci siamo impegnati, giusta nostra possa, di pubblicare questo *Saggio di Calcolo sublime*, ove abbiam cercato di esporre le principali teoriche con quell' ordine, che l' esperienza di parecchi anni ci ha insegnato essere assai vantaggioso a' principianti. Che se taluno voglia estendere le sue cognizioni in siffatta Scienza, dovrà diriggersi alle opere dell' Eulero, del La Croix, del Brunacci, del Paoli, del Bordoni, e di non pochi altri Sommi Analisti, che con bell' ordine, con eleganza, e chiarezza il Calcolo sublime hanno chi più chi meno completamente esposto.

SAGGIO

DI

CALCOLO SUBLIME

INTRODUZIONE.

CAP. I.

DELLE GRANDEZZE VARIABILI, E DELLE LORO FUNZIONI.

§. 1. Principio. I. Ogni grandezza estesa, che grandezza *geometrica* suol dirsi, può intendersi generata dal moto di un punto, di una linea, ovvero di una superficie: e questa genesi ne imparte successivamente a tal grandezza ciascuno di quegl' innumerabili valori, che sono tra la stessa quantità ed il nulla.

§. 2. Princ. II. Ogni angolo, che *grandezza trigonometrica* può dirsi, essendone misurato dall' inclinazione scambievole di due linee rette, può concepirsi generato dal movimento di una retta intorno ad un suo estremo, e sempre in uno stesso piano: ed in tal genesi esso si acquista pure ciascuno di que' valori, che tra lo stesso angolo e 'l nulla s' interpongono.

§. 3. Princ. III. Ed ogni grandezza *meccanica*, come sono le velocità, le forze, i tempi, ec, può concepirsi, che dal nulla prenda origine, e ne passi successivamente per tutti quegl' innumerabili valori, che in essa possono assegnarsi; nello stesso modo che una linea si può concepire generata dal movimento di un punto, una superficie da quello di una linea, ed un solido dal convenevole movimento di una superficie.

§. 4. Princ. IV. Potendosi l' unità di un qualunque numero dinotare con una linea retta; può concepirsi, che a generare quel numero, un punto proceda per una certa direzione descrivendone un' altra

retta, che contenga tante volte la prima, quante volte il proposto numero contiene l' unità : ed in tal genesi quel numero si acquista successivamente ciascuno di quegl' innumerabili valori, che tra esso e 'l nulla s' interpongono.

§. 5. *Cor.* Dunque ogni grandezza discreta può supporsi generata dal movimento di una grandezza geometrica : e potrà dirsi *universale* una tal genesi di grandezze.

§. 6. *Def.* I. Chiamasi *grandezza variabile* ogni quantità che si consideri suscettibile di acquistarsi ciascuno di quegl' innumerabili valori, che la sua genesi successivamente le imparte.

§. 7. *Post.* I. Le grandezze variabili sogliono dinotarsi colle lettere finali u, x, y, z, ec. del nostro abbicì, o con qualche altra di esso o del greco alfabeto, come ne piacerà all' Analista.

§. 8. *Def.* II. Ogni espressione analitica, che contenga una grandezza variabile in qualsivoglia modo combinata con altre quantità costanti, dicesi *funzione di essa variabile.*

§. 9. *Def.* III. Una funzione di una quantità variabile dirassi *algebrica*, se in essa la variabile trovasi combinata colle quantità costanti per mezzo di operazioni proposte nell' Algebra elementare : come sono la somma, la sottrazione, la multiplica, la divisione, l' elevazione a potenza, e l' estrazione di radice.

§. 10. *Def.* IV. Una funzione di una quantità variabile si dirà *trascendente*, se nell' espresssione, che contiene la variabile, si dinoti qualche operazione diversa da quelle, che si espongono nell' Algebra elementare. Di tal natura sono quelle funzioni, che diconsi *esponenziali variabili*, le *logaritmiche*, le *circolari*, ec.

§. 11. *Scol.* Le funzioni algebriche si distinguono in *intiere* e *fratte*, e ciascuna di queste può esserne *razionale*, ovvero *irrazionale*. E quantunque questa distinzione possa farsi benanche nelle funzioni trascen-

denti, pur non di meno gli Analisti la espongono soltanto per le funzioni algebriche.

§. 12. *Def.* V. Una funzione di una quantità variabile si dirà *intiera*, se ciascuno de' suoi termini sia sgombro da denominatore, e se l' abbia, esso sia una quantità costante.

§. 13. *Def.* VI. Un'espressione fratta, che abbia il suo denominatore ingombro di una variabile, o che siane grandezza costante il numeratore o variabile, si dirà *funzione fratta* della stessa variabile.

§. 14. *Def.* VII. Una funzione di una quantità variabile si dirà *razionale*, se la detta variabile non trovasi sottoposta a' segni radicali. E se la variabile di una funzione trovasi sottoposta a' segni radicali, tal funzione si dovrà dire *irrazionale*.

§. 15. *Scol.* L' espressioni $a+bx+cx^2+$ec., ed $(a+bx+cx^2+\text{ec.})^4$ sono due funzioni algebriche intiere e razionevoli della variabile x, ed è irrazionale la funzione $\sqrt[n]{(a+bx+cx^2+\text{ec.})^m}$, ove m ed n sono due numeri tra se primi. Laddove sono funzioni razionali fratte l' espressioni $\frac{a+bx+cx^2+\text{ec.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{ec.}}$, ed $\frac{(a+bx+cx^2+\text{ec.})^n}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{ec.})^m}$, ove m ed n sono numeri intieri: e sono trascendenti le funzioni a^x, $L(a+x)$, Arc.sen x, ec.

§. 16. *Def.* VIII. Ogni espressione analitica, che contenga due o più grandezze variabili in qualsivoglia modo combinate con altre quantità costanti, dicesi *funzione di esse variabili*.

§. 17. *Cor.* Ogni funzione di una o più quantità variabili l' è ancor essa una quantità variabile; purchè non sia una funzione elevata a zero, o l' unità innalzata a qualunque funzione, come sono x^0, ed 1^x, di cui ciascuna pareggia l' unità.

§. 18. *Scol.* Le funzioni di più quantità variabili si distinguono in *algebriche* e *trascendenti*, e le prime si dividono pure in *razionali* ed *irrazionali*, le quali possono essere *intiere* ovvero *fratte*. Ma per le

definizioni di queste funzioni potranno convenevolmente adottarsi quelle, che quassù abbiamo rapportate per le funzioni di una sola variabile (§§. 9, 10, 12, 13, 14).

§. 19. *Def.* IX. Una funzione algebrica intera di più variabili dirassi *omogenea*, se la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine della funzione sia sempre un medesimo numero, il quale determina la dimensione della funzione.

Tali sono le seguenti funzioni $x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3+xz^2$, ed $x^2+axy+y^2+bxz+cz^2$; poichè la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine della prima pareggia il numero 3, ed in ciascun termine della seconda è uguale a 2. Tale è pure la funzione irrazionale $\sqrt[n]{(x^2+axy+y^2)}^m$ ch'è di $\frac{2m}{n}$ dimensioni; poichè svolgendo in serie quel radicale (*a*), in ciascun termine di tal serie la somma degli esponenti delle variabili trovasi uguale al numero $\frac{2m}{n}$.

§. 20. *Def.* X. Una funzione fratta di più variabili dirassi *omogenea*, se sieno funzioni omogenee il numeratore e'l denominatore di essa funzione: e la dimensione di tal funzione ne sarà determinata dalla dimensione del numeratore diminuita della dimensione del denominatore di quel fratto, che la dinota.

Tali sono le seguenti funzioni fratte

$$\frac{xy+y^2}{ax-y},\quad \frac{x^2\sqrt{x}-y^2\sqrt{y}}{x^3-axy^2+y^3},\quad \frac{x^2-axy+y^2}{x^3-2ax^2y-y^3},$$

di cui la prima è di una dimensione, la seconda di $-\frac{1}{2}$ dimensioni, e la terza di -1 dimensione.

§. 21. *Scol.* In questo Capo vengono dimostrate le principali verità, che si appartengono alle funzioni algebriche, e nel seguente quelle, che riguardano le funzioni esponenziali e le logaritmiche. Ma relativa-

(*a*) *Instituzioni di Algebra* §. 128

mente alle funzioni circolari saranno omesse le dimostrazioni di quelle verità, che negli Elementi di Trigonometria sogliono esporsi.

§. 22. *Post.* II. Una qualunque funzione della variabile x ne sarà dinotata dalla X, o pure prefiggendo alla x posta dentro di una parentesi una delle seguenti lettere f, F, φ, ovvero Φ. Cioè una qualunque funzione della variabile x ne sarà dinotata da X, da $f(x)$, da $F(x)$, da $\varphi(x)$, o pure da $\Phi(x)$.

§. 23. *Post.* III. Una qualunque funzione della somma di più variabili x, y, ec. ne sarà in seguito dinotata dalla somma di esse variabili poste in una parentesi, cui venga premessa una delle lettere f, F, φ, ovvero Φ; cioè da $f(x+y+\text{ec})$, da $F(x+y+\text{ec.})$, da $\varphi(x+y+\text{ec.})$, o da $\Phi(x+y+\text{ec})$.

§. 24. *Post.* IV. Una funzione di più variabili x, y, ec. in qualsivoglia modo combinate tra loro e con altre quantità costanti verrà in seguito dinotata da una delle seguenti espressioni $f(x,y,\text{ ec.})$, $F(x,y,\text{ ec.})$, $\varphi(x,y,\text{ ec.})$, o $\Phi(x, y,\text{ ec.})$

§. 25. *Ass.* I. Ogni grandezza variabile può farsi uguale a ciascuno di quei valori determinati, che possono convenirle.

§. 26. *Ass.* II. Ogni funzione di una quantità variabile può porsi uguale a ciascuna di quelle grandezze determinate, che generalmente rappresenta.

§. 27. *Ass.* III. Se costruiscasi una curva, che abbia per equazione caratteristica $y=F(x)$, ogni ordinata di questa curva espressa per y esibirà il valore geometrico dell' indicata funzione. Onde conoscendosi il corso perimetrico di quella curva si potranno intuitivamente percepire i cangiamenti di quella funzione.

PROP. I. TEOR.

§. 28. *Se una funzione algebrica della variabile x si ponga uguale a zero, o ad una grandezza costante o a qualche altra algebrica funzione della x;*

in ciascuno di questi casi non resterà variabile la grandezza x, ma diverrà determinata acquistandone i soli valori soddisfacenti all' equazione, che n' emerge.

Dim. Sia X la proposta funzione, che dal porla uguale a zero, o ad una grandezza costante, o a qualche altra algebrica funzione della x, e con praticarvi gli ovvii riducimenti ne dia l' algebrica equazione

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+\ldots+T=0,$$

ove le A,B,C,D,..T sono grandezze note. Sarà chiaro non essere più la x suscettibile d' infiniti valori, ma di que' soli, che sono soddisfacenti all' esibita equazione, e che dal risolverla si rilevano. Dunque in tal caso la x diviene una grandezza costante. C. B. D.

PROP. II. TEOR.

§. 29. *Ogni funzione algebrica, intiera, e razionale della quantità variabile x potrà esserne esibita per lo prodotto di fattori della forma $\alpha x+\beta$, che saranno tanti di numero per quante saranno le unità del massimo esponente della variabile in essa funzione.*

Sol. Sia $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+Dx^{n-3}+\ldots+T$ la proposta funzione. Sarà chiaro, che se tal funzione si ponga uguale a zero, e poi si divida per A, ne dovrà emergere

$$x^n+\frac{B}{A}x^{n-1}+\frac{C}{A}x^{n-2}+\frac{D}{A}x^{n-3}+\ldots+\frac{T}{A}=0,$$

il cui primo membro risulta multiplicando tra se n fattori della forma $x+a$(a). Dunque se ciascuno di tali fattori si multiplichi per $\sqrt[n]{A}$, e di poi i prodotti, che si ottengono, si multiplichino tra loro, si avrà per ultimo prodotto quello, che si ottiene multiplicando

(a) *Instituzioni di Algebra* §. 220

$\sqrt[n]{A^n}$ per lo prodotto di n fattori della forma $a+x$. Ma questo ultimo prodotto adegua la proposta funzione, ed i prodotti di $\sqrt[n]{A}$ per binomii della forma $a+x$ sono della forma $\alpha x+\beta$. Dunque ogni funzione ec. C.B.D.

§. 30. *Cor.* Concessa la risoluzione delle algebriche equazioni, una qualunque funzione algebrica, intiera, e razionale di una quantità variabile può sempre risolversi ne' suoi fattori lineari, che saranno reali, o immaginarii, o gli uni cogli altri tramischiati. Ma ciascuno de' fattori immaginarii ne ha sempre un altro affine, sicchè il prodotto di essi l'è reale, ed emerge sotto la forma trinomiale $x^2-2ax+c^2$, ove la c l'è maggiore della a. Dunque *concessa la risoluzione delle algebriche equazioni, ogni funzione algebrica, intiera, e razionale di una quantità variabile può sempre risolversi in fattori reali di primo, o di secondo grado.*

CAP. II.

DELLE GRANDEZZE ESPONENZIALI, E DELLE LOGARITMICHE.

§. 31. *Def.* XI. *Grandezze esponenziali variabili* si dicono quelle quantità costanti, o variabili, i cui esponenti sono variabili.

Tali sono a^x, y^x, a^{γ^x}, z^{γ^x}, ec.

§. 32. *Cor.* Sia $m=a^x$. Il valore di x sarà quell'esponente, che deesi porre alla base a affinchè risulti $m=a^x$. Ma supposto, che sieno date le grandezze m ed a, quel valore di x non si può per mezzo di algebriche operazioni determinare. Dunque a ragione le grandezze esponenziali tra le quantità trascendenti si annoverano.

§. 33. *Scol.* La grandezza esponenziale a^x è la più semplice tra le quantità esponenziali: essa sovente risulta dai calcoli, e la di lei teorica l'è come

di base delle funzioni logaritmiche. Dunque soltanto di tale grandezza esponenziale convien determinare di quali valori sia suscettibile.

PROP. III. TEOR.

§. 34. *Il valore della grandezza esponenziale* a^x *dipende non solo dal valore, che può prendere l' esponente variabile* x *di essa, ma benanche da quello, che alla base* a *le si assegna.*

Dim. Poichè se facciasi $a=1$, l'esponenziale a^x si converte nell'altra 1^x, che l'è sempre uguale ad 1 per qualunque valore si dia ad x. Che se facciasi a maggiore di 1, e si ponga $x=0$, la proposta grandezza esponenziale ne diverrà a^0, ch' è uguale ad 1 (*a*): e nella medesima ipotesi di a maggiore di 1 il valore di a^x crescerà col crescere la x, tal che posto per x un numero infinito ne diverrà $a^x=a^\infty$, cioè uguale all' infinito: e ponendo per x un numero negativo, la medesima grandezza esponenziale si convertirà nell' altra a^{-x}, che adegua il fratto $\frac{1}{a^x}$ (*b*), ove a è maggiore di 1. Ma tal fratto diminuisce a misura che cresce la x, tal che ponendo la $x=\infty$, ne diverrà $\frac{1}{a^x}=\frac{1}{a^\infty}=0$. Dunque posta la base a maggiore di 1, la grandezza a^x può prendere ciascuno di quei valori, che sono tra zero e l' infinito, ma non potrà mai divenire negativa.

Finalmente se facciasi a uguale ad un fratto vero positivo, e si ponga $x=0$, la grandezza esponenziale a^x ne diverrà a^0, ch' è uguale ad 1: e nella medesima ipotesi il valore di a^x diminuirà col crescere la x, tal che posto per x un numero infinito, ne diverrà $a^x=a^\infty$, cioè uguale ad un fratto vero multiplicato un infinito

(*a*) *Istit. di Alg.* §. 80.
(*b*) *Inst. di Alg.* §. 81.

numero di volte per se stesso, o sia uguale a zero: e ponendo per x un numero negativo, la medesima grandezza esponenziale si convertirà nell'altra a^{-x}, che adegua $\frac{1}{a^x}$. Ma tal fratto cresce a misura che cresce la x, tal che ponendo la x uguale all' infinito ne diviene

$$a^{-x}=\frac{1}{a^{\infty}}, \text{ cioè } a^{-\infty}=\frac{1}{0},$$

e 'l zero nell' unità si contiene un infinito numero di volte. Dunque ponendo la base a uguale ad un fratto vero, la grandezza esponenziale a^x può prendere ciascuno di quei valori, che sono tra 'l zero e l' infinito; ma non potrà mai divenirne negativa. Dunque ec. C. B. D.

§. 35. *Def.* XII. Il *logaritmo* di un numero é quell' esponente, che devesi apporre ad una certa base maggiore di 1, affinchè la grandezza esponenziale, che ne risulta, pareggi lo stesso numero.

Risch. Sia il numero a maggiore di 1, ed x dinoti quell' esponente, che devesi apporre alla base a, affinchè sia il numero y uguale ad a^x. Sarà il logaritmo di y uguale ad x, e tale uguaglianza sarà in seguito dinotata da $\text{Log.}y=x$.

§. 36. *Cor.* Suppongasi, che nell' equazione $y=a^x$ sieno a ed x variabili, ed y costante. Sarà chiaro, che se diminuisce il valore della x debba crescere quello di a, e viceversa. Il perchè di un medesimo numero y i logaritmi sono infiniti per esserne infiniti i valori, che possono assegnarsi alla basa a. Ma non pertanto gli Analisti considerano semplicemente i logaritmi, che risultano per due soli valori della base a, che in seguito saranno esibiti.

§. 37. *Def.* XIII. Qualora dall' equazione $a^x=y$ si passi all' altra $x=\text{Log.}y$, si dirà fatto *un passaggio dai numeri ai logaritmi*; e viceversa se dall' equazione $x=\text{Log.}y$ si riviene all' altra $a^x=y$, si dirà fatto *il passaggio dai logaritmi ai numeri*.

§. 38. *Cor.* I. Essendo $y=a^x$, e con ciò $\text{Log.}y=x$; l' è chiaro, che i log·mi di quei numeri,

che sono potenze della base a debbono essere razionali.

§. 39. *Cor.* II. Supposto che a sia un numero razionale, i logaritmi dei numeri razionali, che non sono potenze della base a non possono essere razionali, nè irrazionali. Poichè se il numero b, che non sia potenza della base a, abbia il suo logaritmo uguale ad un numero razionale p, dovrà essere $a^p=b$. Ma a^p è una potenza di a. Dunque sarà b la stessa potenza di a: il che ripugna. Che se il numero b non sia potenza della base a, ed abbia per logaritmo un numero irrazionale p; dovrà essere pure $a^p=b$. Ma il valore di a^p non può ottenersi esattamente. Dunque neppure il numero b potrà esibirsi esattamente: il che è assurdo.

§. 40. *Cor.* III. E poichè i logaritmi dei numeri, che non sono potenze della base a, non possono essere razionali, ne irrazionali (§. 39), a ragione i logaritmi si pongono tra le quantità trascendenti.

PROP. IV. TEOR.

§. 41. *Qualunque sia la base di un sistema logaritmico, il logaritmo dell' unità è sempre uguale a zero, il logaritmo di un numero maggiore di 1 è positivo, ed è negativo il logaritmo di ogni numero ch' è tra 'l zero e l' unità.*

Dim. Sia y il valore della quantità esponenziale a^x, la cui base a è maggiore di 1. Sarà (§. 37.) $x=\text{Log}.y=\text{Log}.a^x$. Onde se per x si ponga zero, ne risulterà $o=\text{Log}.a^o=\text{Log}.1$. : se per x si ponga un qualunque numero positivo intiero, o fratto, e che si dinoti per n, ne dovrà risultare $n=\text{Log}.a^n$, ch' è sempre maggiore di 1, per esserne a maggiore di 1: e se per x si ponga il numero negativo $-n$, si avrà

$-n=\text{Log}.a^{-n}=\text{Log}.\frac{1}{a^n}$. Ma $\frac{1}{a^n}$ è sempre minore di 1. Dunque qualunque sia ec. C.B.D.

PROP. V. TEOR.

§. 42. *In ogni sistema logaritmico il logaritmo del prodotto di due numeri è quanto la somma de' logaritmi di essi numeri, e 'l logaritmo di un quoto uguaglia il logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore.*

E con questi due principii si possono i calcoli aritmetici agevolar grandemente.

Dim. Par. I. Sia $a^x=y$, ed $a^z=u$. Sarà $x=\text{Log}.y$, $z=\text{Log}.u$, ed $x+z=\text{Log}.y+\text{Log}.u$. Ma multiplicando tra se i primi ed i secondi membri delle due equazioni $a^x=y$, ed $a^z=u$, si ha pure $a^{x+z}=yu$, e con ciò $x+z=\text{Log}.yu$. Il perchè essendo $x+z$ uguale sì a $\text{Log}.y+\text{Log}.u$, che a $\text{Log}.yu$, dovrà essere

$$\text{Log}.yu=\text{Log}.y+\text{Log}.u.$$

Par. II. In oltre, se il primo membro dell' equazione $a^x=y$ si divida pel primo membro dell'altra $a^z=u$, e 'l secondo pel secondo, ne dovrà risultare $a^{x-z}=\frac{y}{u}$, ed $x-z=\text{Log}.\frac{y}{u}$. Ma l' è $x=\text{Log}.y$, e $z=\text{Log}.u$. Dunque dev' essere pure $x-z=\text{Log}.y-\text{Log}.u$, e con ciò $\text{Log}.\frac{y}{u}=\text{Log}.y-\text{Log}.u$.

Par. III. La multiplica di due numeri potrà eseguirsi sommando i logaritmi di essi, e poi riscontrando nelle tavole logaritmiche qual numero corrisponda a tal somma, cioè che abbia questa somma per suo logaritmo; un tal numero sarà l' addimandato prodotto. La divisione poi di un numero per un altro potrà eseguirsi sottraendo dal logaritmo del dividendo quello del divisore, e riscontrando nelle tavole logaritmiche qual numero corrisponda alla detta differenza di logaritmi; esso dovrà dinotare l' addimandato quoziente. Dunque in ogni sistema logaritmico ec. C. B. D.

PROP. VI. TEOR.

§. 43. *In ogni sistema logaritmico il logaritmo di una qualunque potenza di un numero adegua il logaritmo di esso numero multiplicato per l' indice della potenza. E ciò ne agevola le operazioni aritmetiche dell' elevazioni a potenze e dell' estrazioni di radici.*

Dim. Par. I. Sia Log.$y=x$. Sarà $y=a^x$, ed $y^n=a^{nx}$. Onde dovrà essere Log.$y^n=nx$, cioè Log.$y^n=n$Log.y.

Par. II. Il perchè se vogliasi una qualunque potenza intiera o fratta di un qualsivoglia numero y, basterà multiplicare il logaritmo di y per l' indice di tal potenza, e poi riscontrarne nelle tavole qual numero ha per logaritmo un tal prodotto. Sarà questo numero l' addimandata potenza del numero dato. Dunque in ogni ec. C.B.D.

CAP. III.

DELL' EVOLUZIONI DELLE FUNZIONI IN SERIE.

PROP. VII. TEOR.

§. 44. *Se due funzioni intiere e razionali di una medesima quantità variabile sieno tra se uguali, dovranno essere benanche uguali i coefficienti dei termini, nei quali si contengono uguali potenze di quella variabile.*

Dim. Le proposte funzioni ne sieno dinotate rispettivamente da $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec, e da $a+bx+cx^2+dx^3+$ec, ove A,B,C,D, ec, a,b,c,d, ec. sono quantità costanti. Sarà chiaro, che l' equazione

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}=a+bx+cx^2+dx^3+\text{ec},$$

debba aver luogo per qualunque valore della variabile x. Ma ponendo $x=o$ spariscono dal primo e dal secondo membro tutt' i termini all' infuori di A ed a. Dunque

dovrà essere $A=a$. Il perchè togliendo A ed a dai membri della proposta equazione, dovrà risultarne

$$Bx+Cx^2++Dx^3+\text{ec}=bx+cx^2+dx^3+\text{ec.}$$

o sia $B+Cx+Dx^2+\text{ec.}=b+cx+dx^2+\text{ec,}$

e ponendo $x=0$, si avrà $B=b$. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che sia $C=c$, $D=d$, ec. Dunque se due funzioni intiere ec. C. B. D.

§. 45. *Cor.* Di quì si rileva, che se pongasi la frazione $\frac{a}{m+nx}$ uguale alla serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$ si potranno in facil modo determinare i coefficienti ignoti A, B, C, D, ec. dei termini di essa serie. Poichè multiplicando sì la frazione, che quella serie pel denominatore $m+nx$ della stessa frazione, ne risulta

$$a=Am+Bmx+Cmx^2+Dmx^3+\text{ec.}$$
$$+Anx+Bnx^2+Cnx^3+\text{ec.}$$

Onde dev' essere $Am=a$, $Bm+An=0$, $Cm+Bn=0$, $Dm+Cn=0$, ec.; dalle quali equazioni si ha

$$A=\frac{a}{m},\ B=\frac{-An}{m}=\frac{-an}{m^2},\ C=\frac{-Bn}{m}=\frac{+an^2}{m^3},\ D=\frac{-Cn}{m}=\frac{-an^3}{m^4},$$

ec. Il perchè dev'essere

$$\frac{a}{m+nx}=\frac{a}{m}-\frac{anx}{m^2}+\frac{an^2x^2}{m^3}-\frac{an^3x^3}{m^4}+\text{ec.}$$

Similmente se pongasi

$$\frac{a+bx}{m+nx+rx^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.},$$

e si moltiplichi ciascun membro di questa equazione per $m+nx+rx^2$, si avrà

$$a+bx=Am+Anx+Arx^2+Brx^3+Crx^4+\text{ec.}$$
$$+Bmx+Bnx^2+Cnx^3+Dnx^4+\text{ec.}$$
$$+Cmx^2+Dmx^3+Emx^4+\text{ec.},$$

e con ciò

$Am=a$, $An+Bm=b$, $Ar+Bn+Cm=0$, $Br+Cn+Dm=0$, $Cr+Dn+Em=0$, ec.,

e maneggiando queste equazioni, si otterrà

$$A=\frac{a}{m},\ B=\frac{b-An}{m}=\frac{bm-an}{m^2},\ C=\frac{-Ar-Bn}{m}=$$

$$\frac{\frac{-ar}{m}-\frac{bmn-an^2}{m^2}}{m}=\frac{an^2-bmn-arm}{m^3},\text{ ec.}$$

Ma questo metodo non potrà adottarsi per svolgere in serie quei fratti, di cui ciascun termine del denominatore ha per fattore qualche potenza della variabile x, di cui l'istesso fratto è funzione; poichè ponendo, a cagion d'esempio,

$$\frac{a}{mx+rx^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.},$$

ne risulterebbe

$$a=Amx+Arx^2+Brx^3+Crx^4+\text{ec.}$$
$$+Bmx^2+Cmx^3+Dmx^4+\text{ec.}$$

Onde ponendo $x=0$, si avrebbe $a=0$. Il che ripugna. Il perchè in tal caso converrà dividere il denominatore del proposto fratto per la massima potenza di x, ch'è fattore di esso denominatore, e poi svolgere in serie la frazione, che ne risulta. Così volendo svolgere in in serie la frazione $\frac{a+bx+cx^2+\text{ec.}}{mx^p+nx^{p+1}+rx^{p+2}+\text{ec.}}$, sarà mestieri dividere il denominatore di essa per la massima potenza x^p della x, ch'è fattore dello stesso denominatore, e poi svolgere in serie il fratto $\frac{a+bx+cx^2+\text{ec.}}{m+nx+rx^2+\text{ec.}}$ che ne risulta. Sarà chiaro, che dividendo i termini

di quella serie per x^p si debba ottenere l' altra serie cui è uguale il fratto $\frac{a+bx+cx^2+\text{ec.}}{mx^p+nx^{p+1}+rx^{p+2}+\text{ec.}}$.

PROP. VIII. PROBL.

§. 46. *Esibire il seno dell' arco x per una serie d' infiniti termini, che procedendo dal primo contengano le potenze crescenti dello stesso arco.*

Sol. Sia r il raggio del cerchio, nel quale è preso l' arco x, e si assuma sen x uguale alla serie $ax+bx^3+cx^5+dx^7+\text{ec.}$, nella quale ciascun termine deve avere per fattore una potenza dispari della x; poichè posto $x=0$ ne diviene sen $x=0$, e spariscono tutt' i termini di quella serie, e posto $-x$ in luogo di x, si ha sen $-x=-$sen x, e tutt' i termini della medesima serie debbono cangiare i segni; il che non avrebbe luogo se nei termini di quella serie ve ne fossero alcuni, ove la variabile x vi ascendesse a grado pari.

Ciò posto. Essendo sen $x=ax+bx^3+cx^5+dx^7+\text{ec.}$, dovrà essere

$$\text{sen}^2x=a^2x^2+2abx^4+2acx^6+2adx^8+\text{ec.}$$
$$+b^2x^6+2bcx^8+\text{ec.}$$

e $\cos^2x=r^2-a^2x^2-2abx^4-(2ac+b^2)x^6-(2ad+2bc)x^8-\text{ec.}$

Il perchè dev' essere

$$\text{sen}^2x\cos^2x=a^2r^2x^2+2abr^2x^4+(2acr^2+b^2r^2)x^6+\text{ec.},$$
$$-a^4x^4-2a^3bx^6-\text{ec.},$$
$$-2a^3bx^6-\text{ec.},$$

o sia

$$\text{sen}^2x\cos^2x=a^2r^2x^2+(2abr^2-a^4)x^4+(2acr^2+b^2r^2-4a^3b)x^6$$
$$+\text{ec.}$$

Ma per essere (*a*) $\text{sen}\,2x = \frac{2\text{sen}\,x\cos x}{r}$, l' è pure $\text{sen}^2 2x = \frac{4\text{sen}^2 x\cos^2 x}{r^2}$, e con ciò $\frac{r^2\text{sen}^2 2x}{4} = \text{sen}^2 x\cos^2 x$.

Dunque dev' essere $\frac{r^2\text{sen}^2 2x}{4} = a^2r^2x^2 + (2abr^2 - a^4)x^4$
$+ (2acr^2 + b^2r^2 - 4a^3b)x^6 + \text{ec.} \ldots\ldots (1)$.

Intanto se nell' equazione

$$\text{sen}\,x = ax + bx^3 + cx^5 + \text{ec.}$$

si ponga $2x$ in luogo di x, si avrà

$$\text{sen}\,2x = 2ax + 8bx^3 + 32cx^5 + \text{ec.}$$

$$\text{sen}^2 2x = 4a^2x^2 + 32abx^4 + 128acx^6 + \text{ec.}$$
$$+ 64b^2x^6 + \text{ec.}$$

ed

$$\left.\begin{aligned}\frac{r^2\text{sen}^2 2x}{4} = a^2r^2x^2 + 8abr^2x^4 + 32acr^2x^6 + \text{ec.}\\ + 16b^2r^2x^6 + \text{ec.}\end{aligned}\right\} \ldots (2).$$

Il perchè essendo uguali i primi membri delle due equazioni (1) e (2), dovranno essere benanche tra se uguali i secondi, e con ciò dovranno pareggiarsi i coefficienti (§. 44.) delle uguali potenze della variabile x, cioè dovrà essere

$$a^2r^2 = a^2r^2,\ 8abr^2 = 2abr^2 - a^4,$$
$$32acr^2 + 16b^2r^2 = 2acr^2 - 4a^3b + b^2r^2,$$
$$\text{ec.},$$

ed $a = a$, $b = \frac{-a^3}{2.3r^2}$, $c = \frac{a^5}{2.3.4.5r^4}$, ec.

(*a*) *Elem. di Trig. Rett.* §. *47*.

Ma qualora l'arco x ne diviene picciolissimo, esso è quasi uguale al suo seno, ed in tal caso nel secondo membro di questa ultima equazione si possono trascurare tutt' i termini all' infuori del primo, e quindi si ha $\text{sen}x = ax = x$, ed $a = 1$. Dunque dev' essere

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{2.3.r^2} + \frac{x^5}{2.3.4.5r^4} - \text{ec.} \ldots \text{C.B.F.}$$

PROP. IX. PROBL.

§. 47. *Esibire il coseno dell' arco* x *per una serie d' infiniti termini, che procedendo dal primo contengano le potenze crescenti dello stesso arco.*

Sol. Si dinoti con r il raggio del cerchio, nel quale è preso l' arco x, e si assuma cos.x uguale alla serie

$$r + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \text{ec.},$$

di cui il primo termine è r, e gli altri contengono le potenze pari della x; poichè ponendo $x = 0$, ne diviene cos.$0 = r$, e cangiandosi la x in $-x$, ne risulta cos.$-x$ = cos.x.

Ciò permesso. Essendo cos.$x = r + ax^2 + bx^4 + cx^6 + \text{ec.}$, sarà, elevando a quadrato l' uno e l' altro membro di questa equazione,

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 x = r^2 + 2arx^2 + 2brx^4 + 2crx^6 + \text{ec.} \\ + a^2x^4 + 2abx^6 + \text{ec,} \\ + \text{ec.} \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

Ma essendo (§. 46)

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{2.3r^2} + \frac{x^5}{2.3.4.5r^4} - \text{ec.},$$

dev' essere pure

$$\text{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3r^2} + \frac{x^6}{3.4.5r^4} - \text{ec.}$$

$$+ \frac{x^6}{2.2.3.3r^4} - \text{ec.},$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{e} \quad \cos^2 x = r^2 - x^2 + \frac{x^4}{3r^2} - \frac{x^6}{3.4.5r^4} + \text{ec.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{x^6}{2.2.3.3r^4} + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Dunque essendo tra se uguali i primi membri delle due equazioni (1) e (2), dovranno essere tra se uguali benanche i secondi, e con ciò dovranno pareggiarsi i coefficienti (§. 44) dei termini, nei quali la x in questi stessi secondi membri trovasi elevata ad uguali esponenti. Il perchè si avrà

$$2ar = -1,\ 2br + a^2 = \frac{1}{3r^2},\ 2cr + 2ab = \frac{-1}{3.4.5r^4} - \frac{1}{2.2.3.3r^4},$$

ec. ;

e quindi $a = \frac{-1}{2r}$, $b = \frac{1}{2.3.4.r^3}$, $c = \frac{-1}{2.3.4.5.6r^5}$, ec.

Dunque dev' essere

$$\cos.x = r - \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{2.3.4r^3} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6r^5} + \text{ec. C. B. F.}$$

PROP. X. PROBL.

§. 48. *Esibire la tangente dell' arco* x *per una serie d' infiniti termini, che procedendo dal primo contengano le potenze crescenti dello stesso arco.*

Sol. Posto che r ne dinoti il raggio del cerchio, nel quale prendesi l'arco x, si assuma tang.x uguale alla serie $x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + \text{ec.}$, di cui il primo termine dev' essere x, e gli altri debbono contenere le poten-

ze dispari della x; poichè ponendo l' arco x picciolissimo si possono trascurare tutt' i termini all' infuori del primo, e con ciò ne diviene tang $x=x$, come dev' esserlo, e ponendo $-x$ in luogo di x, si ha tang. $-x=$ $-$tang x, e si cangiano i segni di tutt' i termini dell' assunta serie; il che non avverrebbe se alcuni termini di essa contenessero le potenze pari della x. Ora essendo tang. $x=x+ax^3+bx^5+cx^7+dx^9+$ec., e tang. $x=\frac{r\,\text{sen}\,x}{\cos x}$ come si ha dagli Elem. di Trigonometria, dev' essere

$$\frac{r\,\text{sen}\,x}{\cos x}=x+ax^3+bx^5+cx^7+dx^9+\text{ec.}$$

cioè, ponendo per sen$x$ e cos$x$ le due serie rapportate nelle due precedenti Proposizioni,

$$\frac{rx-\frac{x^3}{2.3r}+\frac{x^5}{2.3.4.5r^3}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7r^5}+\text{ec.}}{r-\frac{x^2}{2r}+\frac{x^4}{2.3.4r^3}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6r^5}+\frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8r^7}-\text{ec.}}$$

$$=x+ax^3+bx^5+cx^7+dx^9+\text{ec.},$$

e multiplicando ciascun membro per $r-\frac{x^2}{2r}+\frac{x^4}{2.3.4r^3}-$ec, si avrà

$$rx-\frac{x^3}{2.3r}+\frac{x^5}{2.3.4.5r^3}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7r^5}+\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8}$$

$$-\text{ec.}=rx+arx^3+brx^5+crx^7+drx^9+\text{ec.}$$

$$\frac{-x^3}{2r}-\frac{ax^5}{2r}-\frac{bx^7}{2rx}-\frac{cx^9}{2r}-\text{ec.}$$

$$+\frac{x^5}{2.3.4r^3}+\frac{ax^7}{2.3.4r^3}+\frac{bx^9}{2.3.4r^3}+\text{ec.}$$

$$-\frac{x^7}{2.3.4.5.6r^5}-\frac{ax^9}{2.3.4.5.6r^5}-\text{ec.}$$

$$+\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8r^7}+\text{ec.}$$

Onde dev' essere (§. 44)

$$ar-\frac{1}{2r}=-\frac{1}{2.3r},\ br-\frac{a}{2r}+\frac{1}{2.3.4r^3}=\frac{1}{2.3.4.5r^3},$$

$$cr-\frac{b}{2r}+\frac{a}{2.3.4r^3}-\frac{1}{2.3.4.5.6r^5}=-\frac{1}{2.3.4.5.6.7r^5},$$

ec.;

e quindi

$$a=\frac{1}{3r^2},\ b=\frac{2}{15r^4},\ c=\frac{17}{315r^6},\ \text{ec.}$$

Dunque dev' essere

$$\text{tang.}x=x+\frac{x^3}{3r^2}+\frac{2x^5}{15r^4}+\frac{17x^7}{315r^6}+\text{ec. C.B.F.}$$

§. 49. Con un metodo simile a quello, che quassù si è rapportato, si potranno svolgere in serie la cotangente, la segante, e la cosegante di un qualunque arco circolare.

PROP. XI. PROBL.

§. 50. *Determinare un arco circolare per una serie, i cui termini incominciando dal primo contengano le potenze crescenti della tangente dello stesso arco.*

Sol. Sia x l' arco circolare, che abbia la retta t per tangente. Sarà $\text{tang}2x=\frac{2r^2t}{r^2-t^2}$. In fatti essendo

$$\text{tang.}2x=\frac{r\,\text{sen}\,2x}{\cos.2x},$$

e $\text{sen}2x=\frac{2\text{sen}x\cos x}{r}$, $\cos 2x=\frac{\cos^2x-\text{sen}^2x}{r}$,

dev' esser pure,

$$\text{tang}2x=\frac{2r\text{sen}x\cos x}{\cos^2x-\text{sen}^2x}, \text{ ovvero } \text{tang}2x=\frac{2r^3\text{sen}x\cos x}{r^2\cos^2x-r^2\text{sen}^2x},$$

e dividendo tanto il numeratore, che il denominatore del secondo membro di quest' ultima equazione per $\cos^2x$, si avrà

$$\text{tang.}\,2x=\frac{\dfrac{2r^3\text{sen}x}{\cos x}}{r^2-\dfrac{r^2\text{sen}^2x}{\cos^2x}}=\frac{2r^2\text{tang.}x}{r^2-\text{tang.}^2x},$$

e ponendo t in luogo di tang.x, si avrà tang.$2x=\frac{2r^2t}{r^2-t^2}$.

Ciò premesso. Si assuma l' arco x uguale alla serie $t+at^3+bt^5+ct^7+$ec., di cui il primo termine è t, e gli altri contengono le potenze dispari della t (§.48). Dovrà assumersi benanche l' arco $2x$ uguale alla serie

$$\frac{2r^2t}{r^2-t^2}+\frac{8ar^6t^3}{(r^2-t^2)^3}+\frac{32br^{10}t^5}{(r^2-t^2)^5}+\frac{128cr^{14}t^7}{(r^2-t^2)^7}+\text{ ec.},$$

che si ottiene ponendo nella prima $\frac{2r^2t}{r^2-t^2}$ in luogo di t.

Ma quest' ultima serie è identica (*a*) alla seguente

$$2r^2t(r^2-t^2)^{-1}+8ar^6t^3(r^2-t^2)^{-3}+32br^{10}t^5(r^2-t^2)^{-5}$$
$$+128cr^{14}t^7(r^2-t^2)^{-7}+\text{ ec.},$$

ed è poi (*b*)

$$2r^2t(r^2-t^2)^{-1}=2r^2t\left\{\begin{array}{l}(r^2)^{-1}-(r^2)^{-2}(-t^2)+(r^2)^{-3}(-t^2)^2\\-(r^2)^{-4}(-t^2)^3+(r^2)^{-5}(-t^2)^4+\text{ ec.}\end{array}\right\}$$

$$=2t+\frac{2t^3}{r^2}+\frac{2t^5}{r^4}+\frac{2t^7}{r^6}+\frac{2t^9}{r^8}+\text{ec.},$$

(*a*) *Instit. di Alg.* §. *81.*
(*b*) *Instit. di Alg.* §. *106.*

$$8ar^6t^3(r^2-t^2)^{-3}=8ar^6t^3\left\{\begin{array}{l}(r^2)^{-3}-3(r^2)^{-4}(-t^2)+6(r^2)^{-5}(-t^2)^2\\-10(r^2)^{-6}(-t^2)^3-\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$=8at^3+\frac{24at^5}{r^2}+\frac{48at^7}{r^4}+\frac{80at^9}{r^6}+\text{ec.},$$

$$32br^{10}t^5(r^2-t^2)^{-5}=32br^{10}t^5\left\{\begin{array}{l}(r^2)^{-5}-5(r^2)^{-6}(-t^2)\\+15(r^2)^{-7}(t^2)^2-\text{ec.}\end{array}\right\}$$

$$=32bt^5+\frac{160bt^7}{r^2}+\frac{480bt^9}{r^4}+\text{ec.},$$

$$128cr^{14}t^7(r^2-t^2)^{-7}=128cr^{14}t^7[(r^2)^{-7}-7(r^2)^{-8}(-t^2)+\text{ec.}]$$

$$=128ct^7+\frac{896ct^9}{r^2}+\text{ec.}$$

$$512dr^{18}t^9(r^2-t^2)^{-9}=512dr^{18}t^9[(r^2)^{-9}-\text{ec.}]$$

$$=512dt^9+\text{ec.}$$

Dunque dev' essere

$$2x=2t+\left(\frac{2}{r^2}+8a\right)t^3+\left(\frac{2}{r^4}+\frac{24a}{r^2}+32b\right)t^5$$

$$+\left(\frac{2}{r^6}+\frac{48a}{r^4}+\frac{160b}{r^2}+128c\right)t^7$$

$$+\left(\frac{2}{r^8}+\frac{80a}{r^6}+\frac{480b}{r^4}+\frac{896c}{r^2}+512d\right)t^9+\text{ec.}$$

Il perchè essendo benanche

$$2x=2t+2at^3+2bt^5+2ct^7+2dt^9+\text{ec.},$$

dovrà essere

$$\frac{2}{r^2}+8a=2a,\quad \frac{2}{r^4}+\frac{24a}{r^2}+32b=2b,$$

$$\frac{2}{r^6}+\frac{48a}{r^4}+\frac{160b}{r^2}+128c=2c,$$

$\frac{2}{r^8}+\frac{80a}{r^6}+\frac{480b}{r^4}+\frac{896c}{r^2}+512d=2d$, ec.;

e quindi $a=\frac{-1}{3r^2}$, $b=\frac{1}{5r^4}$, $c=-\frac{1}{7r^6}$, $d=\frac{1}{9r^8}$, ec.

Dunque dev' essere $x=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^5}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+$ ec. C.B.F.

§. 51. *Cor.* Sia il raggio del cerchio uguale ad 1, e l'arco x di 30°. Sarà tang. $30°=\frac{\text{sen}30°}{\cos 30°}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Onde se nell' equazione finale del prec. Probl. si ponga l'arco di 30° in luogo di x, l'unità in luogo di r, ed $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in vece di t, si avrà l' arco di 30° nella circonferenza del cerchio del raggio 1 uguale alla serie

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}-\frac{1}{9^{3^4}}+\text{ec.}\right),$$

per mezzo della quale Lagny determinò la circonferenza di tal cerchio coll'approssimazione fino alla 127ª cifra decimale.

PROP. XII. PROBL.

§. 52. *Determinare la serie, in che si svolge il Logaritmo di* 1+x.

Sol. La serie, in che si svolge il logaritmo di $1+x$ non può contenere alcun termine sgombro della quantità variabile x; poichè se supponga si essere

$$\text{Log}(1+x)=a+kx+lx^2+\text{ ec.}$$

ponendo $x=0$, si otterrebbe Log. $1=a$: il che ripugna (§. 41.). Sia dunque

$$\text{Log}(1+x)=kx+lx^2+mx^3+nx^4+px^5+qx^6+\text{ ec.}$$

Sarà chiaro, che ponendo sì nel primo, che nel

secondo membro di questa equazione $2x+x^2$ in luogo di x debba risultarne

$$\left.\begin{aligned} L(1+2x+x^2)=2kx+lx^2+4lx^3+lx^4+\text{ ec.}\\ +4lx^2+8mx^3+12mx^4+\text{ec.}\\ +16nx^4+\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

Ma l'è poi $L(1+2x+x^2)=L(1+x)^2=2L(1+x)$, ed è

$$2L(1+x)=2kx+2lx^2+2mx^3+2nx^4+2px^5+\text{ec.}\ldots(2)$$

Dunque essendo uguali i primi membri delle due equazioni (1) e (2), dovranno essere anche tra se uguali i secondi, e con ciò dovranno pareggiarsi i coefficienti dei termini, nei quali la x in essi secondi membri trovasi elevata ad uguali esponenti; cioè dev' essere

$$2k=2k,\ k+4l=2l,\ 4l+8m=2m,\ l+12m+16n=2n,\text{ ec.};$$

e quindi

$$k=k,\ l=-\frac{k}{2},\ m=\frac{k}{3},\ n=-\frac{k}{4},\text{ ec.}$$

Dunque sostituendo i valori di l, m, n, ec. nell' assunta serie, si avrà l' equazione

$$L(1+x)=k(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ ec. }),$$

ove k resta indeterminata per esprimere gl' infiniti sistemi logaritmici (§. 36.). C. B. F.

§. 53. *Cor.* Se nell' equazione

$$L(1+x)=k(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{ ec.}$$

si ponga $-x$ in luogo di x, si dovranno cangiare i segni a tutt' i termini, nei quali la x trovasi elevata a potenze dispari. Onde si avrà

$$L(1-x)=-k(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\text{ ec.}),$$

che tolta dalla precedente ne darà

$$L(1+x)-L(1-x)\text{, o sia (§. 42.)}$$

$$L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2k\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\text{ec.}\right).$$

PROP. XIII. PROBL.

§. 54. *Determinare la serie, in che si svolge la grandezza esponenziale* c^x.

Sol. L'addimandata serie deve avere per primo termine l'unità, e gli altri termini debbono contenere le potenze crescenti della variabile x; cioè l'addimandata serie dev' essere della forma

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{ec.};$$

poichè posto $x=0$, ne diviene $c^x=1$, e la serie si riduce al solo primo termine 1. Ora essendo

$$c^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{ec.} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sarà chiaro, che se pongasi $2x$ in luogo di x in ciascun membro di questa equazione, debba risultarne

$$c^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+32Ex^5+\text{ec.} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ma c^{2x} è il quadrato di c^x. Dunque elevando a quadrato l'uno e l'altro membro dell' equazione (1), si ha pure

$$\left.\begin{aligned} c^{2x}=1+2Ax+2Bx^2+2Cx^3+2Dx^4+2Ex^5+\text{ec.}\\ +A^2x^2+2ABx^3+2ACx^4+2ADx^5+\text{ec.}\\ +B^2x^4+2BCx^5+\text{ec.}\\ +\text{ec.}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Il perchè dovendo essere tra se uguali i secondi membri dell' equazioni (2) e (3), sarà (§. 44.)

$2A=2A$, $4B=2B+A^2$, $8C=2C+2AB$, $16D=2D+2AC+B^2$, $32E=2E+2AD+2BC$, ec.; cioè

$$A=A,\ B=\frac{A^2}{2},\ C=\frac{A^3}{2.3},\ D=\frac{A^4}{2.3.4},\ E=\frac{A^5}{2.3.4.5},\ \text{ec.}$$

Onde se nell' equazione (1) si sostituiscano i valori di B, C, D, E, ec., si otterrà l'altra

$$c^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2.3}+\frac{A^4x^4}{2.3.4}+\frac{A^5x^5}{2.3.4.5}+\text{ec.}$$

e prendendo i logaritmi di ambi i membri si avrà

$$xL.c=L.(1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\text{ec.})=$$

$$k\left\{\begin{array}{l} Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\text{ec.} \\ -\frac{A^2x^2}{2}-\text{ec.} \\ \text{ec.} \end{array}\right\}$$

e con ciò (§. 44.) $kA=L.c$, ed $A=\frac{L.c}{k}$. Dunque dev' essere

$$c^x=1+\frac{L.c}{k}x+\frac{\overline{L.c}^2}{2k^2}x^2+\frac{\overline{L.c}^3}{2.3k^3}x^3+\frac{\overline{L.c}^4}{2.3.4k^4}x^4+\text{ec.C.B.F.}$$

CAP. IV.

DEI RAPPORTI, CHE TRA SE SERBANO I LOGARITMI DEI NUMERI NEI DIVERSI SISTEMI, E DEL MODO DI DETERMINARE I LOGARITMI DEI NUMERI IN UN QUALUNQUE SISTEMA.

§. 55. *Def. XIV.* Un sistema logaritmico dicesi *Neperiano*, *naturale*, o *iperbolico*, se in esso il logaritmo di un numero, che ne sia generalmente dinotato da $1+x$ pareggi la serie infinita $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ec. cioè se in esso sistema sia $k=1$ (§. 52).

§. 56. *Def. XV.* Un sistema logaritmico dicesi *Briggiano*, *volgare*, o *tabulare*, se la base a di esso sistema sia uguale a 10.

§. 57. *Cor.* E poichè nel sistema Briggiano a^1 è uguale a 10, dev'essere nello stesso sistema $a^2=100$, $a^3=1000$, $a^4=10000$, ec., e con ciò $1=\text{Log.}10$, $2=\text{Log.}100$, $3=\text{Log.}1000$, $4=\text{Log.}10000$, ec. Ma l'è poi zero il logaritmo di 1. Dunque nel sistema Briggiano la parte intiera del logaritmo di un numero, che trovasi tra 1 inclusivamente e 10 esclusivamente, è uguale a zero; la parte intiera del logaritmo di un numero, che trovasi tra 10 inclusivamente e 100 esclusivamente, pareggia l' unità: la parte intiera del logaritmo di un numero, che trovasi tra 100 inclusivamente e 1000 esclusivamente, è uguale a 2: ec. Vale a dire, che *nel sistema Briggiano la parte intiera del logaritmo di un numero contiene tante unità per quante sono le cifre intiere di esso diminuite di una.*

§. 58. *Def. XVI.* Il numero intiero, che trovasi nel logaritmo di qualunque numero, chiamasi *caratteristica* di quel logaritmo, e 'l numeratore del fratto decimale, cui riducesi il fratto semplice adjacente alla caratteristica del logaritmo di un qualunque numero, chiamasi *mantissa* di esso logaritmo.

§. 59. *Def. XVII.* Il *canone logaritmico* è una ta-

vola, ove di rincontro ai numeri intieri, che procedendo dall' unità fino ad un numero comunque grande, vi sono rapportatati i logaritmi di essi per un certo sistema.

PROP. XIV. TEOR.

§. 60. *I logaritmi di un medesimo numero in due diversi sistemi sono tra se in una ragione costante.*

Sol. Suppongasi, che nel sistema della base a sia il logaritmo del numero n uguale a p, e nel sistema della base b il logaritmo dello stesso numero n si uguale a q. Sarà $n=a^p$, ed $n=b^q$ (§. 35.); e quindi $a^p=b^q$, ed estraendo la radice q dall' uno e dell' altro membro di quest' ultima equazione, si ottiene $a^{\frac{p}{q}}=b$. Onde dev' essere $\frac{p}{q}$ uguale al logaritmo di b nel sistema della base a. Il perchè dee stare $p:q::\text{Log.}b:1$; cioé $p:q$ in una costante ragione. C. B. D.

§. 61. *Cor.* Sia r il logaritmo del numero m nel sistema della base a, ed s il logaritmo dello stesso numero nel sistema della base b. Sarà $m=a^r$, ed $m=b^s$. Dunque dev' essere $a^r=b^s$, e con ciò $a^{\frac{p}{q}}=b$. Il perchè essendosi dimostrato esserne $a^{\frac{p}{q}}=b$, sarà pure $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{r}{s}}$, e quindi $\frac{p}{q}=\frac{r}{s}$, e $p:r::q:s$. Dunque *i logaritmi di un numero presi in due diversi sistemi sono tra se come i logaritmi di un altro numero presi nei medesimi sistemi.*

PROP. XV. PROBL.

§. 62. *Determinare la base de' logaritmi iperbolici, che in appresso ne sarà sempre dinotata della lettera e.*

Sol. Essendo (§. 54)

$$c^x=1+\frac{\text{Log.}c}{k}x+\frac{\overline{\text{Log.}c}^2}{2k^2}x^2+\frac{\overline{\text{Log.}c}^3}{2.3.k^3}x^3+ec.\ ;$$

l'è chiaro, che se in luogo di c si ponga e, e si faccia $x=1$, debba porsi benanche 1 per Log.c, o per Log.e, ed 1 per k. Onde dovrà risultarne

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\text{ec.},$$

cioè $e=2,718281828459045235 36$. C.B.F.

§. 63. *Cor.* Se k non potesse pareggiare l'unità, non potrebbe risultare la e uguale ad un numero reale, positivo, e maggiore di 1. Dunque dal prec. Problema rilevasi la possibilità di ciò che si è definito nel §. 55.

§. 64. *Scol.* In appresso il logaritmo iperbolico di un qualunque numero verrà dinotato colla lettera L posta avanti ad esso numero.

PROP. XVI. PROBL.

§. 65. *Determinare il numero* k *nel sistema Briggiano.*

Sol. Essendo il numero 10 la base del sistema Briggiano, potrà porsi un tal numero uguale ad $\frac{1+x}{1-x}$. Onde si avrà $10-10x=1+x$, e con ciò $11x=9$, ed $x=\frac{9}{11}$. Il perchè se nell'ultima equazione del §. 53 si ponga Log. 10, o sia 1 in luogo di Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, e $\frac{9}{11}$ in luogo di x, ne dovrà risultare

$$1=2k\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\text{ec.}\right),$$

e $k=0,43429448190325\overset{3}{9}82765$. C. B. F.

PROP. XVII. TEOR.

§. 66. *Se per* n+1 *si dinoti un qualsivoglia numero intiero, il logaritmo iperbolico di esso sarà uguale alla seguente serie, ch' è assai convergente,*

$$L.(n+1)=L.n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+ec\right]$$

Dim. Poichè il numero $n+1$ è identico all'altro $n\left(\frac{n+1}{n}\right)$, dovrà essere

$$L.(n+1)=L.n\left(\frac{n+1}{n}\right)=L.\,n+L\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Ma ponendo $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$, ne risulta $x=\frac{1}{2n+1}$. Dunque sostituendo nell'ultima equazione del §.53 il fratto $\frac{n+1}{n}$ in luogo di $\frac{1+x}{1-x}$, ed $\frac{1}{2n+1}$ per x, ne dovrà emergere

$$L.\left(\frac{n+1}{n}\right)=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+ec\right];$$

e quindi

$$L.(n+1)=L.n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+ec\right].$$

C. B. D.

§. 67. *Cor. I.* Adunque volendo costruire le tavole de' logaritmi iperbolici, dovrà primieramente determinarsi il logaritmo di 2, e con ciò dovrà supporsi $n+1=2$; e quindi si avrà $n=1$, ed $\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3}$. Onde, essendo $L.n=L.1=0$, si avrà

$$L.2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+ec.\right]$$

Dipoi si dovrà determinare il logaritmo di 3. Ma supponendo $n+1=3$, si ha $n=2$, ed $\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{5}$. Dunque

$$L.3=L.2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\text{ec.}\right].$$

Ora il doppio del logaritmo di 2 ne dà quello di 4. Onde essendosi determinato il logaritmo di 4, si avrà facilmente quello di 5. Ed il logaritmo di 6 si avrà sommando i logaritmi di 2 e di 3, che sono i fattori del 6. Nello stesso modo si potranno determinare i logaritmi iperbolici degli altri numeri.

§. 68. *Cor. II.* Il perchè se i logaritmi iperbolici dei numeri si multiplichino pel numero k del sistema Briggiano, i prodotti dovranno dinotare i logaritmi degli stessi numeri in questo secondo sistema.

CAP. V.

DI ALCUNE TRASFORMAZIONI DI CERTE FORMOLE TRASCENDENTI, CHE CONTENGONO QUANTITA' IMMAGINARIE.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 69. *Il logaritmo iperbolico del binomio* $a+b\sqrt{-1}$ *è un binomio della forma* $A+B\sqrt{-1}$.

Dim. Poichè il binomio $a+b\sqrt{-1}$ è il prodotto di a per $1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}$, dev' essere (§. 42.).

$$L.(a+b\sqrt{-1})=L.a+L(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})$$

Ma il logaritmo iperbolico di $1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}$ pareggia (§. 55.) la serie

$$\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\frac{b^2}{2a^2}-\frac{b^3\sqrt{-1}}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^5\sqrt{-1}}{5a^5}+\frac{b^6}{6a^6}-\frac{b^7\sqrt{-1}}{7a^7}-\text{ec.},$$

di cui i termini posti in luogo dispari adeguano il prodotto di $\sqrt{-1}$ per la serie

$$\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-\frac{b^7}{7a^7}+\text{ec.},$$

e quelli posti in luogo pari pareggiano il prodotto di $\frac{1}{2}$ per la serie

$$\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{2a^4}+\frac{b^6}{3a^6}-\frac{b^8}{4a^8}+\text{ec.}$$

Dunque dev' essere

$$\text{L.}(a+b\sqrt{-1})=\text{L.}a+\left(\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-\text{ec.}\right)\sqrt{-1}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{2a^4}+\frac{b^6}{3a^6}-\text{ec.}\right)$$

Onde essendo la serie $\frac{b}{a}-\frac{b^3}{3a^3}+\frac{b^5}{5a^5}-$ ec. uguale all' arco, che nel cerchio del raggio 1 ha per tangente $\frac{b}{a}$, e l' altra serie $\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^4}{2a^4}+\frac{b^6}{3a^6}-$ ec. uguale a $\text{L.}(1+\frac{b^2}{a^2})$; sarà $\text{L.}(a+b\sqrt{-1})=$

$$\text{L.}a+\sqrt{-1}.\text{Arc.tang.}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\text{L.}(1+\frac{b^2}{a^2}),$$

o, per esserne

$$\frac{1}{2}\text{L.}(1+\frac{b^2}{a^2})=\text{L.}\sqrt{(\frac{a^2+b^2}{a^2})}=\text{L.}\sqrt{(a^2+b^2)}-\text{L.}a,$$

$$\text{L.}(a+b\sqrt{-1})=\text{L.}\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{-1}.\text{Arc.tang.}\frac{b}{a}.$$

Il perchè se pongasi $A=\text{L.}\sqrt{(a^2+b^2)}$, e $B=\text{Arc.tang}\frac{b}{a}$, si avrà

$$\text{L.}(a+b\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}\ \ldots\ldots\ \text{C. B. D.}$$

§. 70. *Cor.* Dunque se l' espressione $A+B\sqrt{-1}$ vogliasi convertire nell' altra della forma $L.(a+b\sqrt{-1})$, converrà supporre

$$L.\sqrt{(a^2+b^2)}=A\,,\ \text{ed}\ \text{Arc.tang}\frac{b}{a}=B.$$

Il perchè dovrà essere

$$\sqrt{(a^2+b^2)}=e^A\,,\ \text{e}\ \frac{b}{a}=\text{tang.}B\,,$$

cioè $a^2+b^2=e^{2A}$, e $\frac{b^2}{a^2}=\text{tang.}^2B$.

Ma dalla prima di queste due ultime equazioni si ottiene $a^2=e^{2A}-b^2$, e dalla seconda si ha $a^2=\frac{b^2}{\text{tang.}^2B}$.

Dunque dev' essere

$$\frac{b^2}{\text{tang}^2B}=e^{2A}-b^2,$$

o sia $\quad b^2=e^{2A}\,\text{tang}^2B-b^2\text{tang}^2B\,,$

e quindi $b^2(1+\text{tang}^2B)=e^{2A}\,\text{tang}^2B\,,$

e $\quad b^2=\frac{e^{2A}\,\text{tang}^2B}{1+\text{tang}^2B}\,:$

e multiplicando per $\cos^2B$ il numeratore e 'l denominatore del fratto, ch' è nel secondo membro di quest' ultima equazione, si ottiene

$$b^2=e^{2A}\,\text{sen}^2B\,,\ \text{e}\ b=e^A\,\text{sen}\,B.$$

Ond' essendo $a^2=e^{2A}-b^2$, sarà pure

$$a^2=e^{2A}-e^{2A}\,\text{sen}^2B=e^{2A}\cos^2B\,,\ \text{ed}\ a=e^A\cos B.$$

Il perchè dev' essere

$L.(a+b\sqrt{-1})$, cioè $A+B\sqrt{-1}=L.(e^A\cos B+e^A\,\text{sen}B\sqrt{-1})$.

PROP. XIX. TEOR.

§. 71. *Posto che* e *ne dinoti la base del sistema de' logaritmi iperbolici, e* φ *un qualsivoglia arco del cerchio, che tien per raggio l' unità, dovrà essere*

$$\cos.\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}, \text{ e } \operatorname{sen}\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Dim. Essendo (§. 70.)

$$A+B\sqrt{-1}=L.(e^{A}\cos B+e^{A}\operatorname{sen}B.\sqrt{-1}),$$

se pongasi $A=0$ in questa equazione, ne dovrà risultare

$$B\sqrt{-1}=L(\cos B+\operatorname{sen}B.\sqrt{-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

e passando dai logaritmi ai numeri (§. 37.), si avrà

$$e^{B\sqrt{-1}}=\cos B+\operatorname{sen}B.\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ma ponendo $-B$ in luogo di B nell' equazione (1), si ha

$$-B\sqrt{-1}=L(\cos B-\operatorname{sen}B.\sqrt{-1}),$$

e quindi $e^{-B\sqrt{-1}}=\cos.B-\operatorname{sen}B\sqrt{-1}$ . . . (3).

Dunque dev' essere la somma de' primi membri dell' equazioni (2) e (3) uguale a quella de' secondi, e la differenza di quelli uguale alla differenza di questi; cioè

$$e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}=2\cos B, \text{ ed } e^{B\sqrt{-1}}-e^{-B\sqrt{-1}}=2\operatorname{sen}B\sqrt{-1}$$

Onde dividendo per 2 la prima di queste due ultime equazioni, e per $2\sqrt{-1}$ la seconda, e ponendo φ in luogo di B, si avrà

$$\cos\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}, \text{ e } \operatorname{sen}\varphi=\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \quad . \quad . \quad .$$

C. B. D.

CAP. VI.

DEL RISOLVIMENTO DELLE FUNZIONI FRATTE NELLE LORO PARZIALI (a).

§. 72. *Def.* XVIII. Un fratto, di cui tanto il numeratore, che il denominatore sia una funzione razionale di una variabile, si dice essere *genuino*, se tal variabile ascenda ad una maggior potenza nel denominatore, che nel numeratore, e se ciò non si avveri, esso si dirà *spurio*.

§. 73. *Def.* XIX. Due funzioni di una variabile diconsi essere *tra se prime*, quando esse non abbiano per comune misura, che la sola unità, o qualche altra quantità costante.

PROP. XX. TEOR.

§. 74. *Se* $\frac{M}{N}$ *dinoti una qualunque frazione genuina, ed* X, *e* Ψ *ne sieno i fattori del denominatore, che però suppongansi essere tra se primi, essa potrà scomporsi in due fratti benanche genuini, che abbiano per loro denominatori le grandezze* X *e* Ψ *rispettivamente.*

Dim. Suppongasi la proposta frazione $\frac{M}{N}$ essere uguale a queste due altre $\frac{V}{X}$ e $\frac{\Phi}{\Psi}$, i cui numeratori V e Φ vi si deggiono determinare. E sia n l'indice della massima potenza della variabile x nella funzione X, ed r il massimo esponente della medesima x nell'altra funzione Ψ. Sarà $n+r$ il più grande esponente del-

(a) *Questo argomento l'abbiamo esposto siccome fu rapportato dal signor Nicolò Fergola negli* Opuscoli Matematici di sua Scuola pubblicati in Napoli nell' anno 1811.

l'anzidetta x nel denominatore della proposta frazione, cioè nella N, o nella sua uguale $X\Psi$. È quindi il polinomio $A+Bx+Cx^2 \ldots +Qx^{n-1}$ potrà generalmente disegnare la V (§. 72.), l'altro $A'+B'x+C'x^2 \ldots +Q'x^{r-1}$ ne potrà esprimere la Φ, e 'l numeratore M della proposta frazione dovrà avere la seguente forma generale $a+bx+cx^2+\ldots+qx^{n+r-1}$. Ove vuolsi avvertire, che le a,b,c, ec, A,B,C,ec, A'B',C, ec. ne dinotano quantità costanti, con tal divario che le sole a,b,c,ec, q sono grandezze note, e di queste alcune possono essere anche zero, e le altre poi ne sono ignote da doversi da quelle rilevare.

Ciò posto. Si multiplichi per $X\Psi$ l'assunta equazione

$$\frac{M}{N}=\frac{V}{X}+\frac{\Phi}{\Psi}:$$

avrassi $$M=V\Psi+\Phi X.$$

E ponendo in questa seconda equazione i valori delle grandezze M, V, e Φ quassù indicati sarà

$$a+bx+cx^2+\ldots+qx^{n+r-1}=\Psi(A+Bx+Cx^2+\ldots+Qx^{n-1})$$
$$+X(A'+B'x+C'x+\ldots+Q'x^{r-1}).$$

Ma la variabile x ascende alla potenza r nella funzione Φ. Dunque ella dovrà montarne alla potenza $n+r-1$ nel primo di que' due polinomii, che osservansi nel secondo membro di quest'ultima equazione. Con simil ragionamento si concluderà esserne $n+r-1$ l'indice della più alta potenza della x nel secondo dei detti polinomii. Il perchè essendo $n+r-1$ il massimo esponente della x nell'uno e nell'altro membro dell'esibita equazione, ne sarà $n+r$ il numero delle classi dei termini analoghi, che vi si conterranno: cioè di quei termini, ove la x in ambe le di lei parti ritrovasi elevata alle potenze $0,1,2,3,\ldots n+r-1$. Quindi è che facendosi altrettante equazioni dei coefficienti dei detti termini, potranno determinarsi dalle date $a,b,c,\ldots q$, le assunte A,B,C, ec., A',B',C', ec, e la proposta fra-

zione $\frac{M}{N}$ potrà risolversi nei due fratti genuini quassù indicati. Intanto se le grandezze X e Ψ non siano due fattori della N tra se primi, esse dovranno avere una qualche comune misura, che almeno dev'essere della forma lineare $\alpha+\beta x$. Or supponendo uguale a zero cotesto binomio, lo che può farsi, anche diverrà zero il secondo membro dell'equazione $M=V\Psi+\Phi X$, di cui tal binomio n'è un fattore. E quindi dovrà restarne $M=o$. Il perchè dev'essere $\alpha+\beta x$ fattore della M. Il che ripugna. Dunque X e Ψ debbono essere fattori della N tra se primi. C.B.D.

PROP. XXI. TEOR.

§. 75. *Sieno* $(x-a)^n$ *ed* X *fattori tra se primi del denominatore della frazione genuina* $\frac{M}{X(x-a)^n}$; *dico potersi questa risolvere nelle frazioni benanche genuine, e delle seguenti forme*

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{A'}{(x-a)^{n-1}},\ \frac{A''}{(x-a)^{n-2}},\ \text{ec.}\ldots\ \frac{V}{X},$$

ove i numeratori A, A′, A″, ec. *sono grandezze costanti da determinarsi.*

Dim. In virtù del precedente Teorema il proposto fratto può scomporsi in due altri, l'uno che abbia X per denominatore, e per numeratore la V, ch'è un conveniente polinomio (§. 74), e l'altro che debba avervi $(x-a)^n$ per denominatore, e per numeratore un polinomio della seguente forma $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\varphi x^{n-1}$ Dunque per poter reggere la proposta risoluzione del fratto dovrebbe essere

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A'}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{P}{x-a}=$$

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\varphi x^{n-1}}{(x-a)^n},$$

o, che torna lo stesso, le assunte $A, A', A'', \ldots P$ dovrebbero essere determinabili dalle grandezze α, β, γ, ec. Ma multiplicando cotesta equazione per $(x-a)^n$, ottiensi

$$A+A'(x-a)+A''(x-a)^2+A'''(x-a)^3+\ldots+P(x-a)^{n-1}=$$
$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\varphi x^{n-1},$$

ed il primo membro di quest'ultima equazione n'è simmetrico al secondo. Dunque il pareggiamento dei termini analoghi di essa sarà sufficiente a determinarvi le assunte $A, A', A'', \ldots P$ dalle altre α, β, γ, ec, φ: e quindi potrà esserne

$$\frac{M}{X(x-a)^n}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A'}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{V}{X}.$$

C. B. D.

PROP. XXII. TEOR.

§. 76. *Sieno* $(x^2-2ax+c^2)^n$ *ed* X *i fattori tra se primi del denominatore della frazione genuina della forma* $\frac{M}{X(x^2-2ax+c^2)^n}$; *dico potersi questa risolvere nei seguenti fratti anche genuini*

$$\frac{A+Bx}{(x^2-2ax+c^2)^n}+\frac{A'+B'x}{(x^2-2ax+c^2)^{n-1}}+\frac{A''+B''x}{(x^2-2ax+c^2)^{n-2}}+\ldots+\frac{V}{X}$$

ove le A, B, A', B', *ec. ne denotano altrettante quantità costanti da doversi determinare.*

Dim. Questa verità si dimostra come quella del Teorema precedente, sebbene l'equazione identica, che ne determina le quantità assuntizie A, B, A', B', ec. quì ne monti al grado $2n-1$, e non già al grado $n-1$, come nel precedente.

§. 77. Scol. Il denominatore di un fratto genuino potendo avere fattori di diverse dimensioni, a quali di essi dovrem nostre ricerche limitare? A soli fattori

semplici o lineari; se pure il sieno reali. E se tra quelli ve ne ha degl'immaginarii, questi saran sempre di numero pari, e multiplicati a due a due ne daranno prodotti della forma trinomiale $x^2-2ax+c^2$, ove sia la c maggiore della a. Onde a questi fattori, ed a' semplici reali dovrem limitare le nostre indagini.

PROP. XXIII. TEOR.

§. 78. *Il polinomio* $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ *ec. acquista la forma lineare* $\alpha+\beta x$ *qualora si ponga uguale a zero il trinomio* $x^2-2ax+c^2$, *che non sia fattore di detto polinomio, o, ch'è lo stesso, se nei suoi termini pongasi* $2ax-c^2$ *per* x^2.

Dim. Supponendo il trinomio $x^2-2ax+c^2=0$, sarà $x^2=2ax-c^2$, e quindi $x^3=2ax^2-c^2x$. Onde ponendo nel secondo membro di quest'ultima equazione $2ax-c^2$ in luogo di x^2, ne dovrà risultare $x^3=4a^2x-2ac^2-c^2x$. Dunque il quatrinomio $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ diverrà

$$A+Bx+2aCx-Cc^2+4a^2Dx-2ac^2D-c^2Dx.$$

Il perchè ponendo uguale ad α tutt'i termini costanti di questa espressione, ed uguale a β la somma de' coefficienti della x, essa ridurrassi al binomio lineare $\alpha+\beta x$. Lo stesso ragionamento converrà continuare, se in quel polimonio vi sieno altri termini, ove la x ne monti ad una potenza superiore alla terza. C.B.D.

§. 79. *Def.* XX. Le *frazioni parziali di un fratto genuino* si dicono quelle, che prese insieme il pareggiano, ed i cui denominatori sono fattori del denominatore di quel fratto.

Così i fattori semplici del binomio x^3-x, ch'è il denominatore del fratto genuino $\frac{2x+1}{x^3-x}$, son le grandezze $x, x-1$, ed $x+1$. Dunque le tre frazioni $\frac{-1}{x}$, $\frac{\frac{3}{2}}{x-1}$, e $\frac{-\frac{3}{2}}{x+1}$, che hanno per denominatori i detti

fattori, e che sommate uguagliano quel fratto, saranno le sue parziali, e le più semplici, che esso può avere.

§. 80. *Scol.* Le operazioni, che si debbono istituire su di un fratto genuino per poterlo nelle sue parziali disgregare, a due principalmente si riducono: cioè alla ricerca dei fattori del denominatore di tal fratto, ed alla determinazione dei numeratori di essi. La prima di queste indagini eseguesi agevolmente, concessa la risoluzione delle algebriche equazioni, e l'altra si effettuisce col maneggio delle equazioni identiche. Intanto il denominatore di una frazione parziale convien che sia sempre reale; ond'esso dovrà essere o lineare della forma $x-a$, o pure il prodotto di due fattori immaginarii della forma $x-a-c\sqrt{-1}$, ed $x-a+c\sqrt{-1}$, ch'è sempre reale, e della forma $x^2-2px+q^2$, ove q l'è maggiore di p. E sì l'uno, che l'altro di tali denominatori può esserne a qualunque potenza elevato. Dunque il Problema della risoluzione di un fratto nelle sue parziali può avere quattro casi, o in quattro Problemi subalterni esso può distinguersi, i soggetti de' quali sono dalle sottoposte frazioni esibiti; cioè dalle

$$\frac{M}{X(x-a)},\ \frac{M}{X(x-a)^n},\ \frac{M}{X(x^2-2px+q^2)},\ \text{ed}\ \frac{M}{X(x^2-2px+q^2)^n}$$

Or ciascuno di questi fratti dev'essere genuino: la M ne disegna generalmente il convenevole numeratore; la X n'è il fattore socio di quell'altro del denominatore, che supponesi dato. Questi due fattori deggiono essere tra se primi. E quella frazione, che tiene la X per denominatore, si dirà *complemento delle parziali*, *o fratto del complemento*. Le quali cose doveansi quì marcare per non istarne a ripeterle assai volte. Intanto affinchè sieno ritenibili le operazioni, che conviene effettuire per determinare i numeratori delle frazioni parziali, in che risolvesi un fratto genuino, gli anzidetti Problemi vengono quaggiù esposti in forma di Teoremi.

PROP. XXIV. TEOR.

§. 81. *Supposto che il fratto genuino* $\frac{M}{X(x-a)}$ *ne pareggi le seguenti parziali* $\frac{A}{x-a}$ *e* $\frac{V}{X}$; *dico, che il numeratore* A *della prima di queste parziali sia uguale a ciò che ne diviene il fratto* $\frac{M}{X}$ *al porvisi* a *per* x. *E chiamando* α *cotesto valore determinato dell'assunta* A, *l'espressione* $M-\alpha X$ *divisa per l'altra* x−a *darà sempre per quoziente una funzione intiera della* x, *il quale sarà il valore della* V *numeratore della frazione del complemento.*

Dim. Par. I. L'equazione quassù proposta tra la frazione data, e le di lei parziali, si multiplichi per $X(x-a)$, e poi il primo termine del secondo membro si trasporti nel primo membro. Si avrà

$$M-AX=V(x-a) \quad \ldots . (1).$$

E poichè questa equazione identica dee reggere per qualunque valore della variabile x (§. 44), potrà supporsi esserne $x=a$, o sia il binomio $x-a=0$. Onde in tal supposizione divenendo zero il secondo membro dell'equazione (1), dovrà farsi uguale a zero benanche il primo; cioè dev'essere $M-AX=0$, e quindi $A=\frac{M}{X}$. Ma la medesima supposizione di $x-a=0$ ne induce a porre a per x nelle due M ed X. Dunque il numeratore A della prima delle due proposte parziali sarà uguale a ciò che ne diviene il fratto $\frac{M}{X}$ qualora vi si ponga a per x.

Par. II. Intanto nell'equazione (1) si ponga in luogo di A il suo valore poc'anzi determinato, e che si dinoti per α, e poi si dividano ambedue i membri dell'equazione, che ne risulta, per $x-a$. Onde si

avrà $\frac{M-aX}{x-a}=V$. Ma il secondo membro di questa equazione è una funzione intiera della variabile x (§. 74.). Dunque tale ne dovrà essere anche il primo. Il perchè dividendo l'espressione $M-aX$ per l'altra $x-a$, un tal quoto, che si è detto dover essere una funzione intera della x, ne dinoterà la V assunto numeratore della frazione del complemento. C.B.D.

§. 82. *Cor.* Se la X abbia fattori reali lineari della forma $x-a'$, $x-a''$, $x-a'''$, ec. disuguali tra loro, e dal primo $x-a$; sarà chiaro, che dinotando con X' il quoto di X per $x-a'$, la frazione $\frac{V}{X}$ si possa risolvere nelle due parziali della forma $\frac{A'}{x-a'}$ e $\frac{V'}{X'}$. Nello stesso modo si potrà risolvere la frazione $\frac{V'}{X'}$ in due parziali della medesima forma, ec. E ciò intendasi benanche per le altre risoluzioni di cotesti fratti, che in questo Capo saranno eseguite.

Esempio. Diasi la frazione $\frac{x^2}{(1+x^2)(x-1)}$, *rinvenirne i numeratori delle sue parziali* $\frac{A}{x-1}+\frac{V}{1+x^2}$.

Paragonando questa data frazione all'altra $\frac{M}{X(x-a)}$, che quassù generalmente si è proposta, si vedrà immantinente dover essere $M=x^2$, $X=1+x^2$, ed $a=1$. Dunque in virtù del precedente Teorema dovrà essere $A=\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}$, ponendovi $x=1$. E 'l numeratore V della frazione del complemento, ch' è quanto $(M-aX):(x-a)$, quì dovrà uguagliare l'espressione $x^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ divisa pel binomio $x-1$, cioè fatte le riduzioni, esso sarà eguale ad $\frac{1}{2}(x^2-1):(x-1)=\frac{1}{2}(x+1)$.

Vale a dire dev' essere $V=\frac{1}{2}(x+1)$. Onde sarà la data frazione

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(x-1)}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x+1}{2(1+x^2)}.$$

PROP. XXV. TEOR.

§. 83. *Supposto che il fratto genuino* $\frac{M}{X(x-a)^n}$ *pareggi le seguenti parziali*

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A'}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A''}{(x-a)^{n-2}}+\ldots\ldots+\frac{V}{X}$$

il numeratore A *della prima di coteste parziali sarà uguale a ciò che ne diviene il fratto* $\frac{M}{X}$ *al porvisi* a *per* x. *Ed indicando per* α *un tal valore di* A, *e per* M′ *l' esatto quoto di* $M-\alpha X$ *per* $x-a$, *il numeratore* A′ *della seconda parziale sarà uguale a ciò che ne diviene il fratto* $\frac{M'}{X}$ *al porvisi* a *per* x. *E ciò deesi continuare nello stesso modo per gli altri numeratori. Onde l' ultimo dei divisati quozienti, cioè quello, che si prenda la* n^{esima} *volta, sarà il numeratore* V *della frazione del complemento.*

Dim. Par. I. L' assunta equazione si multiplichi per $X(x-a)^n$ denominatore del proposto fratto, e 'l primo termine del secondo membro di essa si trasporti nel primo membro. Onde si avrà

$$M-AX=A'X(x-a)+A''X(x-a)^2+\ldots\ldots+V(x-a)^n\ldots.(1).$$

Ciò posto. Poichè questa equazione dee reggere per qualunque valore si dia alla variabile x; potrà supporsi esserne $x-a=0$, e con ciò $x=a$. Ma in tal supposizione diviene zero il secondo membro della medesima equazione. Dunque dovrà risultare uguale a zero benanche il primo; cioè dev' essere $M-AX=0$;

e quindi $A=\frac{M}{X}$, ponendo a per x. Si dinoti con α il determinato valore di A, e l'equazione (1) si divida per $x-a$. Dovrà emergerne

$$\frac{M-\alpha X}{x-a}=A'X+A''X(x-a)+\ldots+V(x-a)^{n-1}\ldots(2),$$

di cui il secondo membro è una funzione intiera della variabile x. Dunque dev'essere benanche una quantità intiera l'espressione $\frac{M-\alpha X}{x-a}$; cioè dev'essere $M-\alpha X$ esattamente divisibile per $x-a$. Si dinoti con M' un tal quoziente, il quale si sostituisca nell'equazione (2). Onde trasportando nel primo membro il primo termine del secondo membro, dovrà emergerne l'equazione

$$M'-A'X=A''(x-a)+\ldots+V(x-a)^{n-1},$$

la quale è identiforme all'altra (1), e perciò collo stesso ragionamento fatto poc'anzi potrà concludersi dover essere A' uguale a ciò che ne diventa il fratto $\frac{M'}{X}$ al porvisi a per x. E lo stesso convenevolmente si dica per gli altri numeratori A'', A''', ec. delle proposte parziali. E si vedrà poi col ragionamento della Par. II del Teorema precedente dover essere l'ultimo dei quozienti quassù proposti, cioè quello, che siasi preso dopo il numero n di volte, uguale a V numeratore della frazione del complemento $\frac{V}{X}$. C.B.D.

Esempio. Diasi la frazione $\frac{x^2}{(1+x^2)(1-x)^3}$, *ritrovare i numeratori delle sue parziali*

$$\frac{A}{(1-x)^3}+\frac{A'}{(1-x)^2}+\frac{A''}{(1-x)}+\frac{V}{1+x^2}$$

Paragonando la data frazione colla proposta general-

mente $\frac{M}{X(x-a)^n}$, si vedrà dover essere $M=x^2$, $X=1+x^2$, $a=1$, ed $n=3$. Onde dovrà essere $A=\frac{x^2}{1+x^2}$, ponendo nel secondo membro 1 per x, cioè $A=\frac{1}{2}=\alpha$. E quindi sarà $\frac{M-\alpha X}{x-a}=\frac{x^2-\frac{1}{2}(1+x^2)}{1-x}=M'$, cioè $M'=-\frac{1}{2}(x+1)$. Il perchè dovrà essere $\frac{M'}{X}=-\frac{x+1}{2(x^2+1)}$, e ponendo 1 per x nel secondo membro di quest' ultima equazione, si avrà $A'=-\frac{1}{2}=\alpha'$. Dunque dev' essere $M'-\alpha' X=-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(x^2+1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$, $\frac{M'-\alpha' X}{x-a}=\frac{x^2-x}{2(1-x)}$, cioè $M''=-\frac{1}{2}x$, ed $\frac{M''}{X}=\frac{-x}{2(x^2+1)}$, e con ciò $A''=-\frac{1}{4}=\alpha''$. In oltre essendo

$$M''=-\tfrac{1}{2}x;\ \text{sarà}\ \frac{M''-\alpha'' X}{x-a}=\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}}{1-x}=-\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{4};$$

e quindi dev' essere

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(1-x)^3}=\frac{1}{2(1-x)^3}-\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1-x}{4(x^2+1)}.$$

PROP. XXVI. TEOR.

§. 84. *Supposto che sia*

$$\frac{M}{X(x^2-2ax+c^2)}=\frac{A+Bx}{x^2-2ax+c^2}+\frac{V}{X},$$

per determinare le quantità A *e* B *sarà mestieri ridurre in forma lineare l' equazione* $M-AX-BXx=0$, *con porvi mai sempre* $2ax-c^2$ *per* x^2, cioè $x^2-2ax+c^2=0$, *e poi pareggiare a zero i coefficienti dei termini analoghi di detta equazione. E dinotando con* α *e* β *i valori di* A *e* B *rispettivamente, il numeratore* V *del-*

la frazione del complemento sarà quanto l' espressione $M-\alpha X-\beta Xx$ *divisa per l' altra* $x^2-2ax+c^2$, *di cui il quoto dev' essere sempre una funzione intiera della variabile* x.

Dim. Par. I. L' equazione quassù proposta tra la frazione data e le sue parziali, si multiplichi per $X(x^2-2ax+c^2)$, e poi si trasportino nel primo membro di essa i due primi termini, che veggonsi nel secondo. Si avrà in tal modo

$$M-AX-BXx=V(x^2-2ax+c^2), \quad . \; . \; . \; (1).$$

In oltre si supponga uguale a zero il trinomio $x^2-2ax+c^2$, ch' è un fattore del secondo membro dell' equazione (1); dovrà restarne il primo membro uguale a zero, al par del secondo, cioè

$$M-AX-BXx=0. \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Or dal supporne $x^2-2ax+c^2=0$, ne risulta $x^2=2ax-c^2$, e col continuo sostituirsi $2ax-c^2$ per x^2 nell' espres, sione $M-AX-BXx$, questa trasformasi in un' altra lineare. Dunque uguagliando a zero i termini costant- dell' equazione (2) ridotta a lineare, e quei puranche, che vi contengono la x, si avranno due equazioni indeterminate sufficienti a determinarvi le due grandezze assunte A e B.

Par. II. Si esprimono per α e β i valori di A e B, e ponendoli nell' equazione (1) in luogo di A e B, si divida la detta equazione per $x^2-2ax+c^2$. Avrassi

$$\frac{M-\alpha X-\beta Xx}{x^2-2ax+c^2}=V.$$

Ma la grandezza V è una funzione intiera della x: dunque tale dovrà esserne il quoto di $M-\alpha X-\beta Xx$ per $x^2-2ax+c^2$, che sarà il valore di V numeratore della frazione del complemento. C.B.D.

Esempio. Data la frazione $\frac{x^2}{(1-x+x^2)(1+x^4)}$, *ri-*

trovare i numeratori di queste sue parziali

$$\frac{A+Bx}{1-x+x^2}+\frac{V}{1+x^4}.$$

Suppongasi uguale a zero il trinomio $1-x+x^2$. Sarà $x^2=x-1$, $x^4=x^2-2x+1=x-1-2x+1=-x$. Or paragonando la data frazione all'altra $\frac{M}{X(x^2-2ax+c^2)}$ generalmente proposta, si avrà $M=x^2=x-1$, $X=1+x^4=1-x$, $Xx=x+x^5=x-x^2=1$. Il perchè sostituendo nell' equazione $M-AX-BXx=0$ i valori di M, X, ed Xx, ne verrà la seguente

$$x^2-A-Ax^4-Bx-Bx^5=0,$$

che ridotta a lineare si trasforma nell' altra

$$x-1-A+Ax-B=0,$$

ove pareggiando a zero i coefficienti dei termini analoghi, si avrà

$$-1-A-B=0, \text{ ed } 1+A=0.$$

Dunque dev' essere $A=-1$, e $B=0$. Ma il numeratore V della frazione del complemento $\frac{V}{X}$ pareggia il quoziente di $M-AX-BXx$ per $1-x+x^2$, ove siensi posti i valori di A e B già determinati, ed i proprii valori delle M, X, ed Xx. Dunque dev' essere

$$V=\frac{x^2+1+x^4}{1-x+x^2}=x^2+x+1.$$

E quindi si ha

$$\frac{x^2}{(1+x^4)(1-x+x^2)}=\frac{-1}{1-x+x^2}+\frac{x^2+x+1}{1+x^4}.$$

PROP. XXVII. TEOR.

§. 85. *Supposto che la frazione* $\frac{M}{X(x^2-2ax+c^2)^n}$ *ne pareggi queste sue parziali*

$$\frac{A+Bx}{(x^2-2ax+c^2)^n}+\frac{A'+B'x}{(x^2-2ax+c^2)^{n-1}}+\frac{A''+B''x}{(x^2-2ax+c^2)^{n-2}}+\ldots+\frac{V}{X}$$

dovran farsi le stesse operazioni del Teorema precedente per vi determinare il numeratore della prima di esse parziali. Ed esprimendo per α *e* β *i valori delle* A *e* B, *per la* M' *l' esatto quoziente dell' espressione* $M-\alpha X-\beta Xx$ *per lo trinomio* $x^2-2ax+c^2$, *dovrà ridursi in forma lineare l' equazione* $M'-A'X-B'Xx=0$, *e pareggiare a zero i termini analoghi di essa per determinarvi le* A' *e* B'. *E così più appresso. E l' ultimo quoziente, che n' esprime una delle grandezze* M'', M''', ec. *dev' essere il valore di* V.

Dim. Colla guida della *Prop.* XXIV, e co' principii della *Prop.* XXVI può facilmente congegnarsi una dimostrazione a questa Proposizione.

Esempio. Risolvere la frazione $\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}$ *nelle sue parziali*

$$\frac{A+Bx}{(1+x^2)^4}+\frac{A'+B'x}{(1+x^2)^3}+\frac{A''+B''x}{(1+x^2)^2}+\frac{A'''+B'''x}{1+x^2}+\frac{V}{1+x^4}.$$

Si supponga il binomio $1+x^2=0$. Dovrà essere $x^2=-1$, $x^3=-x$, $x^4=-x^2=1$, ed $x^5=x$. Ma paragonando la data frazione alla proposta generalmente $\frac{M}{X(x^2-2ax+c^2)^n}$, si ha

$$M=x-x^3,\ X=1+x^4,\ Xx=x+x.^5$$

Dunque l' espressione $M-AX-BXx$ riducesi all' altra $x-x^3-A-Ax^4-Bx-Bx^5$, che dee farsi uguale a zero

qualor si ponga -1 per x^2, $-x$ per x^3, 1 per x^4, ed x per x^5. E perciò dev' esser $x+x-A-A-Bx-Bx=0$, cioè $2x-2A-2Bx=0$. Onde dev' essere $A=0$, e $B=1$. In oltre l' espressione $(M-AX-BXx):(1+x^2)$ con porvi i valori di A e di B di già determinati, ed i proprii valori delle M, X, ed Xx, diviene $-x^3(1+x^2):(1+x^2)=-x^3$. Dunque sarà $M'=-x^3$, e l' equazione $M'-A'X-B'Xx=0$ determinatrice delle assunte A' e B', con porvisi quei valori ridotti delle x^3, X, ed Xx, ridurrassi alla seguente $x-2A'-2B'x=0$. Onde sarà $A'=0$, e $B'=\frac{1}{2}$. Similmente l' espressione $(M'-A'X-B'Xx):(1+x^2)$ coi valori di già esibiti delle A' e B', e coi proprii valori delle M', X, ed Xx si riduce a $(-x^3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^5):(1+x^2)$ cioè a $-\frac{1}{2}(x+x^3)$: e l' equazione $M''-A''X-B''Xx=0$, coi valori ridotti delle M'', X, ed Xx dovrà trasformarsi nell' altra

$$-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x-2A''-2B''x=0.$$

Ed avrassi $A''=0$, $B''=0$.

Finalmente l' espressione $(M''-A''X-B''Xx):(1+x^2)$, ove pongansi i valori delle M'', A'', X, B'', ed Xx, ne diviene $-\frac{1}{2}x(1+x^2):(1+x^2)=-\frac{1}{2}x$. Dunque sarà $M''=-\frac{1}{2}x$. E l' equazione $M'''-A'''X-B'''Xx$, che serve a determinare le A''' e B''' qualora vi si ripongono i valori ridotti delle M''', X, ed Xx, diverrà $-\frac{1}{2}x-2A'''-2B'''x=0$, e ne darà $A'''=0$, e $B'''=-\frac{1}{4}$. Il perchè se vogliasi il numeratore V della frazione del complemento, si dovrà dividere per $1+x^2$ l' espressione $M'''-A'''-B'''Xx$, nella quale siensi posti i valori delle M''', A''', e B''' poc' anzi determinati, non men che quelli delle X ed Xx, e sarà $V=(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^5):(1+x^2)$; cioè fatta la divisione dovrà risultarne

$$V=-\tfrac{1}{4}x(1-x^2).$$

Onde sarà la proposta frazione

$$\frac{x-x^3}{(1+x^2)^4(1+x^4)}=\frac{x}{(1+x^2)^4}+\frac{x}{2(1+x^2)^3}-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{x(1-x^2)}{4(1+x^4)}.$$

SAGGIO
DI
CALCOLO DIFFERENZIALE

CAP. I.

DELLE DIFFERENZE FINITE.

§. 86. *Def.* I. Le *differenze finite* delle quantità variabili u, x, y, ec. sono talune parti finite di queste, che si possono assumere costanti o variabili, come ne aggrada, e che sogliono dinotarsi con $\Delta u, \Delta x, \Delta y$, ec. rispettivamente.

§. 87. *Def.* II. La *differenza seconda* di una quantità variabile x è la differenza finita della differenza finita Δx di essa, e suol dinotarsi con $\Delta^2 x$. E la *differenza terza* della variabile x è la differenza finita della differenza seconda $\Delta^2 x$ della stessa variabile, ed essa suol dinotarsi con $\Delta^3 x$ Nello stesso modo si possono formare le definizioni delle *differenze quarte*, *delle quinte*, ec. di una quantità variabile x, le quali si dinotano con $\Delta^4 x$. $\Delta^5 x$, ec.

§. 88. *Def.* III. Qualora ciascuna delle variabili di una funzione si aumenti della sua differenza finita, e dall' espressione, che ne risulta, si sottragga la medesima funzione, il residuo, che si otterrà, si dirà *differenza finita di essa funzione*.

§. 89. *Rischiaramento*. Sia y una funzione della quantità variabile x, ed essa ne diventi y' qualora vi si ponga $x+\Delta x$ in luogo di x. Dovrà essere $y'-y$ la differenza finita di y, che potrà pure dinotarsi con Δy.

§. 90. *Cor.* Dunque 1.° delle sole quantità variabili possono assegnarsi le differenze finite: 2.° la differenza finita di ogni quantità costante è uguale a zero: 3.° e quindi se assumasi costante la differenza fi-

nita di una quantità variabile, la differenza seconda di essa sarà pure uguale a zero.

§. 91. *Post.* 1. Qualora del quadrato y^2 di una funzione y si dee prendere la differenza finita, questa ne sarà dinotata da $\Delta.y^2$, laddove il quadrato della differenza finita di y suol dinotarsi con Δy^2. Ed in generale $\Delta.y^m$ ne dinota la differenza finita della potenza m di y, e Δy^m rappresenta la potenza m della differenza finita di y.

PROP. I. TEOR.

§. 92. *La differenza finita del logaritmo iperbolico di* x *n' è dinotata dalla serie*

$$\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}+\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\frac{\Delta x^4}{4x^4}+\text{ec.}$$

Dim. Sia $y=\text{L}.x$. Sarà (§. 89) $y^1=\text{L}.(x+\Delta x)$, ed y^1-y, ovvero $\Delta y=\text{L}(x+\Delta x)-\text{L}.x$. Ma $\text{L}(x+\Delta x)-\text{L}.x$ pareggia $\text{L}.\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$ (§. 42.), ovvero $\text{L}.\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

Dunque dev' essere

$$\Delta y=\text{L}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Il perchè se nella serie (§. 55.), che ne dinota il logaritmo iperbolico di $1+x$, pongasi $\frac{\Delta x}{x}$ in luogo di x, dovrà risultarne Δy, o sia

$$\Delta.\text{L}x=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}+\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\frac{\Delta x^4}{4x^4}+\text{ec.},$$

ch' è l' esposta serie. C.B.D.

PROP. II. TEOR.

§. 93. *La differenza finita della potenza* m *di*

una variabile x *pareggia l' espressione*

$$mx^{m-1}\Delta x+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\Delta x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}\Delta x^3+\text{ec.}$$

Dim. Poichè supposto che sia $y=x^m$, dev' essere $y'=(x+\Delta x)^m$, ed $y'-y=(x+\Delta x)^m-x^m$, e sviluppando la potenza m di $x+\Delta x$, e ponendo $\Delta.x^m$ per $y'-y$ si avrà

$$\Delta.x^m=mx^{m-1}\Delta x+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\Delta x^2+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}\Delta x^3+\text{ ec.}$$

Dunque ec. C.B.D.

§. 94. *Cor.* I. Dunque la differenza finita di x^2 dee pareggiare $2x\Delta x+\Delta x^2$: la differenza finita di x^{-2} adegua la serie $-2x^{-3}\Delta x+3x^{-4}\Delta x^2-$ ec., cioè $-\frac{2\Delta x}{x^3}+\frac{3\Delta x^2}{x^4}-$ ec: quella di ax^2 dee pareggiare $2ax\Delta x+a\Delta x^2$, e l' altra di $\frac{b}{x^2}$, che adegua bx^{-2}, dev' essere uguale a $-\frac{2b\Delta x}{x^3}+\frac{3b\Delta x^2}{x^4}-$ ec.

§. 95. *Cor.* II. Il perchè la differenza finita dell' espressione $a+bx+cx^2$ dev' essere dinotata da $b\Delta x+2cx\Delta x+c\Delta x^2$, e quella di $a+bx+cx^2+ex^3$ da

$$b\Delta x+2cx\Delta x+c\Delta x^2+3ex^2\Delta x+3ex\Delta x^2+e\Delta x^3.$$

§. 96. *Cor.* III. Dai precedenti Corollarii si rileva, 1.° che la differenza finita del prodotto di una quantità costante per una funzione di una variabile pareggia il prodotto della quantità costante per la differenza finita di quella funzione; 2.° e che la differenza finita di una funzione di una variabile è la stessa della differenza finita della medesima funzione aumentata o diminuita di una quantità costante.

PROP. III. TEOR.

§. 97. *Se nel cerchio del raggio* r *prendasi l' arco* x, *dovrà essere la differenza finita di* sen x *uguale alla serie seguente*

$$\frac{\Delta x \cos x}{r} - \frac{\Delta x^2 \operatorname{sen} x}{2r^2} - \frac{\Delta x^3 \cos x}{2.3r^3} + \text{ec.}$$

Dim. Supposto che y pareggi sen x, dev' essere $y' = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$; cioè $y' = \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \operatorname{sen} \Delta x \cos x}{r}$.

Ma (§§. 46, 47) l' è poi

$$\cos.\Delta x = r - \frac{\Delta x^2}{2r} + \frac{\Delta x^4}{2.3r^3} - \text{ec},$$

e

$$\operatorname{sen} \Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{2.3r^2} + \text{ec.}$$

Dunque dev' essere pure

$$y' = \operatorname{sen} x - \frac{\Delta x^2}{2r^2} \operatorname{sen} x + \frac{\Delta x^4}{2.3r^4} \operatorname{sen} x - \text{ec.}$$

$$+ \frac{\Delta x \cos x}{r} - \frac{\Delta x^3 \cos x}{2.3r^3} + \text{ec},$$

e trasportando sen x nel primo membro, ed ordinando il secondo membro per rapporto alle potenze di Δx, si avrà $y' - \operatorname{sen} x$, ovvero $y' - y$, cioè

$$\Delta.\operatorname{sen} x = \frac{\Delta x \cos x}{r} - \frac{\Delta x^2 \operatorname{sen} x}{2r^2} - \frac{\Delta x^3 \cos x}{2.3r^3}$$

$$+ \frac{\Delta x^4 \operatorname{sen} x}{2.3.4r^4} - \text{ec. C.B.D.}$$

PROP. IV. PROBL.

§. 98. *Determinare la differenza finita di una funzione* u *delle variabili* x, y, z, *ec.*

Sol. Nella proposta funzione in luogo delle variabili x, y, z, ec. vi si pongano rispettivamente le medesime variabili aumentate delle loro differenze finite; cioè $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, ec. Il perchè ne dovrà risultare una funzione di x, y, z, ec., $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, ec, che dovrà pareggiare u'. E quindi togliendo da questa funzione l'altra u, si avrà $u'-u$, o sia Δu, che sarà l'addimandata differenza finita. C.B F.

Esempio I. *Suppongasi, che si voglia la differenza finita di* $a+bx+cy+exy$.

Ponendo u uguale alla proposta funzione, dovrà essere $u'=a+bx+b\Delta x+cy+c\Delta y+exy+ex\Delta y+ey\Delta x+e\Delta y\Delta x$, ed $u'-u=b\Delta x+c\Delta y+ex\Delta y+ey\Delta x+e\Delta x\Delta y$, o sia

$$\Delta u=(b+ey)\Delta x+(c+ex)\Delta y+e\Delta x\Delta y.$$

Esempio II. *Si voglia determinare la differenza finita di* $(x+y)^m$, *che sia uguale ad* u.

Dovrà essere

$$u'=(x+\Delta x+y+\Delta y)^m=[(x+y)+(\Delta x+\Delta y)]^m,$$

o sia

$$u'=(x+y)^m+m(x+y)^{m-1}(\Delta x+\Delta y)$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}(x+y)^{m-2}(\Delta x+\Delta y)^2+\text{ ec.},$$

ed $u'-u$, o sia

$$\Delta u=m(x+y)^{m-1}(\Delta x+\Delta y)+\frac{m(m-1)}{2}(x+y)^{m-2}(\Delta x+\Delta y)^2+\text{ec}$$

§. 99. *Cor.* Dai precedenti esempii si rileva, che se le differenze finite delle variabili x, y, ec. di una funzione si considerino anche come variabili; la differenza seconda della medesima funzione sarà una funzione di esse variabili, e delle di loro differenze finite. Il perchè dinotandosi con $\Delta^2 x, \Delta^2 y$, ec. le differenze finite di $\Delta x, \Delta y$, ec. rispettivamente; si avrà la differenza finita della differenza finita, o sia la differenza seconda della funzione, se nella differenza pri-

ma di essa pongasi $x+\Delta x$ in luogo di x, $y+\Delta y$ in luogo di y, ec. e $\Delta x+\Delta^2 x$ in luogo di Δx, $\Delta y+\Delta^2 y$ in luogo di Δy, ec. e poi dall'espressione, che ne risulta, si tolga la differenza prima della funzione.

Esempio. Determinare la differenza seconda di $ax+y^2$.

Essendo la differenza finita di $ax+y^2$ uguale ad $a\Delta x+2y\Delta y+\Delta y^2$, sarà la differenza seconda di $ax+y^2$ uguale ad

$$a(\Delta x+\Delta^2 x)+2(y+\Delta y)(\Delta y+\Delta^2 y)+(\Delta y+\Delta^2 y)^2$$
$$-a\Delta x-2y\Delta y-\Delta y^2,$$

ed effettuendo le moltiplicazioni, e le contrazioni dei termini, si avrà le stessa differenza seconda uguale ad

$$a\Delta^2 x+2y\Delta^2 y+2\Delta y^2+4\Delta y\Delta^2 y+\Delta^2 y^2.$$

§. 100. *Cor.* I. Nello stesso modo si dovrà procedere per determinare la differenza terza, la quarta, ec. di una qualunque funzione.

§. 101. *Cor.* II. Da quanto in questo Capo si è esposto si possono stabilire le seguenti verità

I. *La differenza finita di una qualunque funzione di una quantità variabile x dee avere la seguente forma*

$$A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+\text{ ec.}$$

II. *La differenza finita di una funzione di più variabili* x, y, z, ec. *dee avere la forma*

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+\text{ec}+D\Delta x^2+E\Delta x\Delta y+F\Delta y^2$$
$$+G\Delta x\Delta z+H\Delta y\Delta z+\text{ ec.}$$

III. *La differenza seconda di una funzione della variabile* x *è della forma*

$$A\Delta^2 x+B\Delta^2 x^2+C\Delta x^2+D\Delta x\Delta^2 x+E\Delta x^3+\text{ ec:}$$

ed in ciascuna di queste tre espressioni le quantità A, B, C ec. possono essere funzioni di una o più variabili, o quantità costanti, ed alcune di esse possono essere anche zero.

CAP. II.

DEL METODO DE' LIMITI.

§. 102. *Def.* IV. Ogni grandezza, al cui valore si approssimi continuamente una quantità variabile nel suo crescere o diminuire fino a differire da essa per una quantità minore di qualunque grandezza assegnabile, senza poterla mai uguagliare, dicesi *limite* di quella variabile.

Rischiaramento. Suppongasi, che z sia una funzione della variabile x, che nel suo crescere o decrescere si approssimi sempre ad una quantità A senza poterla mai uguagliare, com' è un poligono regolare inscritto o circoscritto ad un cerchio rispetto all' aja del cerchio stesso. Sarà la differenza finita di z uguale a quella di detta funzione; cioè (§. 101 n. 1.)

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \text{ec.}$$

Egli è chiaro, che diminuendosi il valore di Δx, debba diminuire benanche quello di Δz. Onde divenendone picciolissimo il valore di Δx, dovrà divenirne picciolissimo benanche quello di Δz. Ma dividendo per Δx ambi i membri della precedente equazione si ottiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \text{ec},$$

e divenendone picciolissimi i valori di Δz e Δx, il rapporto di tali grandezze adegua quello di due grandezze finite (poichè se il numeratore e 'l denominatore di un fratto si multiplichino per una stessa grandezza, il fratto non cangia di valore), ed un tal rapporto si và sempre approssimando al valore di A, senza mai poterlo uguagliare, ma dovendone differire da esso per $B\Delta + C\Delta x^2 +$ ec, ch'è una quantità picciolissima, quando Δx l' è minore di qualunque grandezza assegnabile. Dunque il limite del rapporto di Δz a Δx è uguale ad A.

PROP. V. TEOR.

§. 103. *Le grandezze* A *e* B, *che son limiti di una stessa grandezza* X, *sono tra se uguali.*

Dim. Poichè se A e B non sono tra se uguali, sia D l'eccesso della prima di esse sull'altra. E quindi se la variabile X nel suo crescere si approssimi sempre a B senza poterla mai uguagliare, ma potendone differire per una grandezza ω minore di qualunque quantità assegnabile; la differenza tra A ed X non potrà mai divenirne minore di $D+\omega$, che non è minore di qualunque quantità assegnabile. E perciò A non potrà essere limite della grandezza X. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che se la X nel diminuire si approssimi sempre ad A, non potrà essere B limite di X. Dunque affinchè le grandezze A e B sieno limiti della medesima grandezza X, dev' essere A uguale a B. C. B. D.

CAP. III.

DE' DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE.

§. 104. *Def.* V. Il *Differenziale* di una grandezza variabile è una parte picciolissima di essa.

Rischiaramento. Sia z una funzione della variabile x. Dovrà essere (§. 101 n. 1)

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+\text{ ec.}$$

Onde se le quantità Δz e Δx ne diventino picciolissime, tal che la somma di $B\Delta x$, $C\Delta x^2$, ec. risulti minore di qualunque quantità assegnabile; Δz e Δx si diranno differenziali delle variabili z ed x.

§. 105. *Post.* II. I differenziali delle grandezze varabili x, y, z, ec. verranno in seguito dinotati con dx, dy, dz ec. rispettivamente.

§. 106. *Cor.* Essendo uguale a zero la differenza finita di ogni quantità costante, il differenziale di tal quantità sarà pure uguale a zero.

§. 107. *Def.* VI. Il *Calcolo differenziale* è quel ramo dell'analisi moderna, che ne dà le regole per determinare i differenziali delle diverse funzioni.

§. 108. *Post.* III. La lettera D. prefissa ad una qualunque funzione ne dinota, che di essa funzione debba prendersi il differenziale.

PROP. VI. TEOR.

§. 109. *Il differenziale del logaritmo iperbolico di una quantità variabile pareggia il differenziale di essa grandezza diviso per la medesima grandezza. Cioè dev' essere*

$$D.L.x=\frac{dx}{x}.$$

Dim. Essendo (§. 92.).

$$\Delta.Lx=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x^2}{2x^2}+\frac{\Delta x^3}{3x^3}-\text{ec.},$$

dividendo per Δx ambi i membri di quest'equazione, si avrà

$$\frac{\Delta.Lx}{\Delta x}=\frac{1}{x}-\frac{\Delta x}{2x^2}+\frac{\Delta x^2}{3x^3}-\text{ec.},$$

e prendendo i limiti, dovrà risultarne (§§. 102, 104)

$$\frac{D.L.x}{dx}=\frac{1}{x};\ \text{cioè}\ D.L.x=\frac{dx}{x}\ldots\ \text{C. B. D.}$$

PROP. VII. TEOR.

§. 110. *Il differenziale del prodotto di più funzioni di una quantità variabile pareggia la somma de' prodotti, che si hanno multiplicando il diffren-*

ziale di ciascuna funzione per lo prodotto di tutte le altre.

Dim. Sia u il prodotto delle funzioni x, y, z, ec. di una quantità variabile t. Dovrà essere (§. 42.)

$$L.u = L.xyz.. = Lx + L.y + L\,z + \ldots$$

E differenziando ambi i membri di quest' equazione, si avrà (§. 109)

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \ldots,$$

e multiplicando il primo membro per u, e 'l secondo per $xyz\ldots$, dovrà risultarne

$$du = yz..dx + xz..dy + xy..dz + ..$$

Dunque il differenziale del prodotto ec. C.B.D.

PROP. VIII. TEOR.

§. 111. *Il differenziale di un fratto pareggia quell'altro fratto, che ha per numeratore il prodotto del denominatore pel differenziale del numeratore, diminuito del prodotto del numeratore pel differenziale del denominatore, e per denominatore il quadrato del denominatore del fratto proposto. Cioè dev'essere*

$$D.\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Dim. Sia $z = \frac{x}{y}$ . . . (1). Sarà $L.z = L.\frac{x}{y}$; cioè (§. 42)

$$L.z = L.x - L.y.$$

E prendendo i differenziali di ambi i membri di quest'ultima equazione, si avrà (§. 109.)

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \ldots (2)$$

E multiplicando il primo membro dell'equazione (1)

pel primo membro dell' equazione (2), e 'l second
pel secondo, ne dovrà risultare

$$dz=\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{y^2}$$

ovvero, riducendo ad un sol fratto il secondo membr

$$dz=\frac{ydx-xdy}{y^2},$$

ch' è l' equazione proposta. Dunque ec. C.B. D.

PROP. IX. TEOR.

§. 112. *Il differenziale di una potenza di una quantità variabile pareggia l' esponente della potenza multiplicato per la grandezza stessa elevata al medesimo esponente diminuito di 1, e per lo differenziale della medesima grandezza.*

Dim. Sia $y=x^m$. Sarà (§. 43.) L. $y=m$L. x, e' differenziale di L. y uguale a quello di mL. x; cioè

$$\frac{dy}{y}=\frac{mdx}{x}.$$

Ma l'è $y=x^m$. Dunque dev' essere

$$\frac{dy}{x^m}=\frac{mdx}{x},$$

e multiplicando per x^m ciascun membro della precedente equazione, si avrà

$$dy=mx^{m-1}dx.$$

Dunque il differenziale di una potenza ec. C.B.D.

PROP. X. TEOR.

§. 113. *Il differenziale del seno di un arco preso nel cerchio del raggio r pareggia il differen*

ziale dx *dell'arco multiplicato pel coseno dello stesso arco diviso del raggio. Cioè dev' essere*

$$D.\text{sen}x=\frac{dx\cos x}{r}$$

Dim. Essendosi nel §. 97 dimostrato esserne

$$\Delta\text{sen}x=\frac{\Delta x\cos x}{r}-\frac{\Delta x^2\text{sen}x}{2r^2}+\frac{\Delta x^3\cos x}{2.3r^3}+\text{ec},$$

dividendo quest'equazione per Δx, e di poi prendendo i limiti, si avrà

$$\frac{D.\text{sen}x}{dx}=\frac{\cos x}{r}.$$

Il perchè dev' essere

$$D.\text{sen}x=\frac{dx\cos x}{r}$$

Dunque il differenziale ec. C.B.D.

PROP. XI. TEOR.

§. 114. *Il differenziale del coseno di un arco* x *preso nel cerchio del raggio r pareggia il differenziale dello stesso arco preso negativamente multiplicato pel seno di quell'arco diviso pel raggio r. Cioè dev' essere*

$$D.\cos.x=-\frac{dx\text{sen}x}{r}$$

Dim. Si dinoti con p la circonferenza del cerchio, che ha r per raggio. Dovrà essere $\cos x=\text{sen}\left(\frac{p}{4}-x\right)$, e $D.\cos x=D.\text{sen}\left(\frac{p}{4}-x\right)$. Ma il differenziale di $\text{sen}.\left(\frac{p}{4}-x\right)$

pareggia $\frac{D.\left(\frac{p}{4}-x\right).\cos\left(\frac{p}{4}-x\right)}{r}$ (§. 113), ed è D. $\left(\frac{p}{4}-x\right)=-dx$, e $\cos\left(\frac{p}{4}-x\right)=\text{sen}.x$. Dunque dev' essere

$$D.\cos.x=-\frac{dx\text{sen}x}{r}\ldots C.\ B.\ D.$$

§. 115. *Cor.* E poichè tang.x pareggia $\frac{r\text{sen}x}{\cos.x}$, e' differenziale di $\frac{r\text{sen}x}{\cos.x}$ adegua $\frac{dx\cos^2x+dx\text{sen}^2x}{\cos^2x}$, come si rileva dai §§. 111, 113, e 114. Dunque dev' essere

$$D.\text{tang}.x=\frac{dx\,(\cos^2x+\text{sen}^2x)}{\cos^2x}.$$

Il perchè essendo $\cos^2x+\text{sen}^2x=r^2$, dev'essere pure

$$D.\text{tang}.x=\frac{r^2dx}{\cos^2x}.$$

Nello stesso modo si potrà rilevare, che sia

$$D.\cot.x=D.\frac{r\cos x}{\text{sen}x}=\frac{-r^2dx}{\text{sen}^2x}$$

$$D.\text{segan}.x=D.\frac{r^2}{\cos x}=\frac{rdx\text{sen}x}{\cos^2x},$$

$$D.\text{cosegan}.x=D.\frac{r^2}{\text{sen}x}=-\frac{rdx\cos x}{\text{sen}.^2x};\text{ e}$$

$$D.\text{sen. ver}.x=D.(r-\cos.x)=\frac{dx\text{sen}x}{r}.$$

PROP. XII. TEOR.

§. 116. *Il differenziale di un arco preso nel cerchio del raggio* r, *e che abbia la variabile* x *per seno, pareggia il raggio r multiplicato pel differenziale* dx *del seno diviso pel coseno* $\sqrt{(r^2-x^2)}$ *dello stesso arco.*

Dim. Suppongasi, che sia y=Arc.sen$x$. Sarà il seno dell'arco y uguale ad x; cioè sen$y=x$; e quindi

$$\frac{dy\cos y}{r}=dx \text{ (§. 113) .... (1).}$$

Ma essendo sen.$y=x$, dev' essere sen$^2y=x^2$, $r^2-\text{sen}^2y=\cos^2y=r^2-x^2$, e $\cos y=\sqrt{(r^2-x^2)}$. Dunque se nell'equazione (1) si ponga $\sqrt{(r^2-x^2)}$ per cos.y, si avrà

$$\frac{dy\sqrt{(r^2-x^2)}}{r}=dx,$$

e dy=D.Arc.sen$x=\dfrac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ .... C.B.D.

§. 117. *Cor.* I. Suppongasi, che un arco preso nel cerchio del raggio r abbia per coseno la variabile x. Sarà il seno di questo arco uguale a $\sqrt{(r^2-x^2)}$. Dunque tanto sarà dire Arc.cos.x, che Arc.sen.$\sqrt{(r^2-x^2)}$. Ma pel Teor. prec. il differenziale di Arc.sen$\sqrt{(r^2-x^2)}$ pareggia $\dfrac{r\text{D}.\sqrt{(r^2-x^2)}}{x}$, ed è D. $\sqrt{(r^2-x^2)}=\dfrac{-xdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$).

Dunque dev' essere

$\dfrac{r\text{D}.\sqrt{(r^2-x^2)}}{x}=\dfrac{-rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, e D.Arc.sen$\sqrt{(r^2-x^2)}$, o sia

$$\text{D.Arc.cos.}x=\frac{-rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

§. 118. *Cor.* II. Sia x la tangente di un arco preso nel cerchio del raggio r. Sarà $\sqrt{(r^2+x^2)}$ la se-

gante dello stesso arco. Ma sta la segante al raggio come la tangente al seno. Dunque dee stare $\sqrt{(r^2+x^2)}$: r : : x ad $\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$, che sarà il seno di quell'arco, di cui x n' è la tangente. Dunque dev' essere

$$\text{D.Arc.tang.}x=\text{D.Arc.sen}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}.$$

Ma il differenziale di Arc.sen.$\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$ pareggia

(§. 116.) $r\text{D.}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}:\sqrt{\left(r^2-\frac{r^2x^2}{r^2+x^2}\right)}$, o sia

$r\text{D.}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}:\sqrt{\left(\frac{r^4}{r^2+x^2}\right)}$, cioè $r\,\text{D.}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}:\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$

ed è poi $\text{D.}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}=\frac{rdx\sqrt{(r^2+x^2)}-\frac{rx^2dx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}}{r^2+x^2}$, ovvero $\text{D.}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}=\frac{rdx(r^2+x^2-x^2)}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{r^3dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Dunque dev' essere

$$\text{D. Arc. sen}\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}=\frac{r^4dx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}:\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+^2)}},$$

cioè $\text{D.Arc.tang.}x.=\frac{r^2dx}{r^2+x^2}$.

§. 119. *Cor.* III. Che se la x ne dinoti la cotangente di un arco preso nel cerchio del raggio r; dovrà essere la cosegante dello stesso arco uguale a $\sqrt{(r^2+x^2)}$. Ma la cosegante di un arco sta al raggio come il raggio al seno. Dunque dev' essere il seno dello stesso arco uguale ad $\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$. E quindi

$$\text{Arc.cotang.}x=\text{Arc.sen}\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$$

e $$\text{D.Arc.cotang}\,x=\text{D.Arc.sen}\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}.$$

Ma il secondo membro di quest' ultima equazione (§. 116) adegua $r\text{D}.\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}:\sqrt{\left(r^2-\frac{r^4}{r^2+x^2}\right)}$, cioè $r\text{D}.\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}:\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$, ed è $\text{D}.\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}=\frac{-r^2xdx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Dunque dev' essere

$$\text{D.Arc.cot}x=\frac{-r^3xdx}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}:\frac{rx}{\sqrt{(r^2+x^2)}}=\frac{-r^2dx}{r^2+x^2}.$$

Nello stesso modo si potrà rilevare, che sia

$$\text{D.Arc.seg.}x=\frac{r^2dx}{x\sqrt{(x^2-r^2)}},\ \text{D.Arc.cosegan.}x=\frac{-r^2dx}{x\sqrt{(x^2-r^2)}},$$

e $$\text{D.Arc.sen.vers.}x=\frac{r^2dx-rxdx}{(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}}=\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

PROP. XIII. TEOR.

§. 120. *Il differenziale di una grandezza esponenziale* (§. 31.) *a base costante pareggia la grandezza stessa multiplicata pel differenziale dell' esponente e pel logaritmo iperbolico della base. Cioè dev' essere*

$$\text{D}.a^x=a^x\text{d}x\text{L}.a.$$

Dim. Suppongasi esserne $y=a^x$. Sarà $\text{L}.y=x\text{L}.a$: E quindi $\frac{dy}{y}=dx\text{L}.a$. Ma $\frac{dy}{y}$ pareggia $\frac{dy}{a^x}$. Dunque dev' essere $\frac{dy}{a^x}=dx\text{L}.a$, e dy, o sia $\text{D}.a^x=a^xdx\text{L}.a$. C. B. D.

PROP. XIV. TEOR.

§. 121. *Il differenziale della somma di più funzioni di una medesima quantità variabile pareggia la somma de' differenziali di quelle funzioni.*

Ciò è chiaro dalle cose precedenti (§§. 94, 95).

Esempio. Esibire il differenziale dell'espressione $L(x+\sqrt{(1+x^2)})$.

Essendo il differenziale di $x+\sqrt{(1+x^2)}$ uguale a $dx+\frac{xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$, ovvero a $\frac{dx\sqrt{(1+x^2)}+xdx}{\sqrt{(1+x^2)}}$, e 'l differenziale di $L(x+\sqrt{(1+x^2)})$ uguale all' espressione

$$\frac{D.(x+\sqrt{(1+x^2)})}{x+\sqrt{(1+x^2)}} \text{ (§. 109);}$$

dovrà essere pure

$$D.L(x+\sqrt{(1+x^2)})=\frac{dx(\sqrt{(1+x^2)}+x)}{\sqrt{(1+x^2)}.(x+\sqrt{(1+x^2)})}.$$

e dividendo per $x+\sqrt{(1+x^2)}$ tanto il numeratore, che il denominatore del secondo membro di quest' ultima equazione, si avrà

$$D.L(x+\sqrt{(1+x^2)})=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}.$$

CAP. IV.

DE' DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI DI PIU' VARIABILI, E DE' DIFFERENZIALI SECONDI, TERZI, EC. DELLE FUNZIONI.

§. 122. *Def.* VII. Se nel differenziare una funzione di più variabili, una sola di queste grandezze si consideri come variabile, e le altre si assumano costanti; l' espressione differenziale, che si otterrà, si dirà *differenziale della funzione rispetto a quella tale variabile.*

Così per esempio se della funzione axy^2+cyx^2 delle variabili x ed y si consideri come variabile la sola x, ed in tal supposizione se ne prenda il differenziale $ay^2dx+2cyxdx$; questo sarà il differenziale della proposta funzione rispetto alla variabile x.

PROP. XV. TEOR.

§. 123. *Il differenziale di una funzione di più variabili* x, y, z, *ec. pareggia la somma de' differenziali, che si hanno differenziando successivamente quella funzione per rapporto a ciascuna variabile.*

Dim. Sia u una funzione delle variabili x, y, z, ec. Sarà (§. 101 n. 11.)

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \text{ec.} + D\Delta x^2 + E\Delta x\Delta y + F\Delta y^2 + G\Delta x\Delta z + H\Delta z^2 + \text{ec},$$

e dividendo ambi i membri di questa equazione per Δx, si avrà

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = A + B\frac{\Delta y}{\Delta x} + C\frac{\Delta z}{\Delta x} + \text{ec} + D\Delta x + E\Delta y + F\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta x} + G\Delta z + H\Delta z\frac{\Delta z}{\Delta x} + \text{ec.}$$

Or se le differenze finite Δx, Δy, Δz, ec. vadano continuamente diminuendo, dovrà diminuire benanche il valore di Δu, ed allor che diventano picciolissime le quantità Δx, Δy, Δz, ec, debbono risultare quantità finite non solo le frazioni $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, ec, ma benanche $\frac{\Delta u}{\Delta x}$; laddove le quantità $D\Delta x$, $E\Delta y$, $F\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ec. debbono divenirne picciolissime. Dunque il limite del rapporto di Δu a Δx, o sia $\frac{du}{dx}$ dee pareg-

giare $A+B\frac{dy}{dx}+C\frac{dz}{dx}+$ec. E quindi dev'essere

$$D.u=Adx+Bdy+Cdz+\text{ec.}$$

Intanto se suppongasi, che nella proposta funzione sia variabile la sola x, sarà uguale a zero ciascuna delle quantità dy, dz, ec; e quindi dovrà essere $du=Adx$. Che se suppongasi variabile la sola y, si avrà $du=Bdy$, ec. Dunque il differenziale della funzione x delle variabili x, y, z, ec. pareggia la somma de' differenziali Adx, Bdy, Cdz, ec, che si hanno differenziando successivamente quella funzione per rapporto a ciascuna variabile. C.B.D.

Esempio. I. *Vogliasi il differenziale di* axy^2. Essendo ay^2dx il differenziale di axy^2 preso rispetto ad x, e $2axydy$ il differenziale di axy^2 preso rispetto ad y; sarà il differenziale di axy^2 uguale ad $ay^2dx+2axydy$.

Esempio II. Determinare il differenziale di

$$L(x^2+y^2).$$

Poichè $\frac{2xdx}{x^2+y^2}$ pareggia il differenziale di $L(x^2+y^2)$ preso per rapporto ad x, e $\frac{2ydy}{x^2+y^2}$ adegua il differenziale di $L(x^2+y^2)$ preso per rapporto ad y; dev'essere

$$D.L(x^2+y^2)=\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}.$$

§. 124. *Cor.* I. Si ponga $x^y=z$. Sarà, passando dai numeri ai logaritmi, $yL.x=L.z$, e $D.yL.x=\frac{dz}{z}=\frac{dz}{x^y}$. Ma l' è poi $D.yLx=dyLx+\frac{ydx}{x}$. Dunque dev' essere $\frac{dz}{x^y}=dyLx+\frac{ydx}{x}$, e quindi

$$dz=x^y dyLx+x^{y-1}ydx.$$

§. 125. *Cor.* II. Supposto che sia $xy=z$; dev'essere pure $a^{x^y}=a^z$, e $D.a^{x^y}=D.a^z=a^z dz L.a$, e ponendo per z e dz i loro valori (§.124), si avrà

$$D.a^{x^y}=a^{x^y}\left(x^y dy\, L.x^{y-1}y dx\right)L.a.$$

§. 126. *Def.* VIII. *Il secondo differenziale* di una grandezza variabile è il differenziale del primo differenziale di essa: e 'l *terzo differenziale* della medesima grandezza è il differenziale del secondo di lei differenziale: ec.

§. 127. *Post.* IV. Il secondo differenziale di una quantità variabile x suol dinotarsi con ddx, o più comunemente con d^2x: il terzo differenziale della stessa grandezza x si dinota con d^3x: ec.; laddove il quadrato, il cubo, ec. di dx si dinotano con dx^2, dx^3, ec. rispettivamente.

§. 128. *Cor.* I. Essendo dx una quantità piccolissima rispetto ad x; dev'essere dx^2 picciolissima per rapporto a dx, siccome lo è d^2x. E perciò le quantità d^2x e dx^2 si dicono *grandezze infinitesime di secondo ordine* rispetto ad x. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che d^3x e dx^3 sieno grandezze infinitesime rispetto a d^2x, e di terzo ordine rispetto ad x, ec.

§. 129. *Cor.* II. Dunque essendo infinitesime le quantità dx e dy, il prodotto di queste $dxdy$ dev'essere infinitesimo tanto rispetto a dx, che a dy; e quindi sarà un infinitesimo di secondo ordine rispetto ad x.

PROP. XVI. PROB.

§. 130. *Esibire il metodo generale per determinare il differenziale secondo di una qualunque funzione.*

Sol. Dinotandosi con dx, dy, ec. i differenziali

delle variabili x, y, ec., ed essendo tali differenziali anch'essi variabili, di cui d^2x, d^2y, ec. ne sono i differenziali; l'è chiaro, che il differenziale secondo di una qualunque funzione delle variabili x, y, ec. si possa ottenere dal primo considerando come variabili non solo le x, y, ec., ma benanche i differenziali dx, dy, ec. delle stesse grandezze. C.B.F.

Esempio. Si voglia il differenziale secondo di axy^2?

Poichè il differenziale primo di axy^2 pareggia (§. 123) $ay^2dx+2ayxdy$, il cui differenziale preso per rapporto ad x adegua $2aydxdy$, preso per rapporto ad y pareggia $2aydydx+2axdy^2$, preso per rapporto a dx è uguale ad ay^2d^2x, e preso per rapporto a dy pareggia $2axyd^2y$; sommando questi differenziali, si avrà il secondo differenziale di axy^2 uguale a

$$4aydxdy+2axdy^2+ay^2d^2x+2axyd^2y.$$

PROP. XVII. TEOR.

§. 131. *Se una funzione* φ (x, y) *delle variabili* x, *ed* y *si differenzii per rapporto ad* x, *e poi il differenziale, che si ottiene, si differenzii per rapporto ad* y; *ne dovrà risultare la stessa espressione prendendo un tal differenziale prima per rapporto ad* y, *e poi per rapporto ad* x.

Dim. E poichè dal Cap. III. si rileva, che il differenziale di $\varphi(x, y)$ preso per rapporto ad x pareggia $\varphi(x+dx, y)-\varphi(x, y)$, il cui differenziale preso per rapporto ad y adegua

$$\varphi(x+dx, y+dy)-\varphi(x+dx, y)-\varphi(x, y+dy)+\varphi(x, y).$$

Ma quest'ultima espressione è la stessa dell'altra

$$\varphi(x+dx, y+dy)-\varphi(x, y+dy)-\varphi(x+dx, y)+\varphi(x, y),$$

che si ottiene differenziando per rapporto ad x l'espressione $\varphi(x, y+dy)-\varphi(x, y)$, ch'è il differenziale di $\varphi(x, y)$ preso per rapporto ad y. Dunque è vero ciò che si è proposto. C. B. D.

§. 132. *Post.* V. Il differenziale di una funzione z di più variabili x, y, ec. preso per rapporto ad x sarà in seguito dinotato da $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$: quello della stessa funzione preso per rapporto ad y ne sarà espresso da $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$: ec.

§. 133. *Cor.* Dunque se z ne dinoti una funzione delle due variabili x ed y, dev' essere

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy,$$

ove $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ rappresenta il differenziale di z preso per rapporto ad x, e diviso per dx, e $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ne dinota il differenziale di z preso per rapporto ad y, e diviso per dy.

§. 134. *Post.* VI. Il differenziale di $\left(\frac{dz}{dx}\right)dx$ preso per rapporto ad y ne verrà in seguito dinotato da $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy$, e quello di $\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ preso per rapporto ad x ne sarà espresso da $\left(\frac{dz}{dydx}\right)dydx$.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 135. *Se* z *ne dinoti una funzione delle due variabili* x *ed* y, *e sia* dz=Adx+Bdy; *dovrà essere*

$$\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right).$$

Dim. Poichè z è una funzione delle due variabili x ed y; dev' essere

$$dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy.$$

Ma l'è pure, per ipotesi,

$$dz = Adx + Bdy.$$

Dunque dev'essere

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)dx = Adx, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)dy = Bdy.$$

E differenziando la prima di queste due ultime equ zioni per rapporto ad y, e la seconda per rappor ad y, si avrà (§§. 132, 134)

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)dxdy = \left(\frac{dA}{dy}\right)dxdy, \text{ e } \left(\frac{d^2z}{dydx}\right)dydx = \left(\frac{dB}{dx}\right)dyd$$

Il perchè essendo (§. 131) tra se uguali i prim membri di queste equazioni, dovranno essere benan che tra se uguali i secondi. Dunque dev'essere pure

$$\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right). \quad . \quad . \quad \text{C.B.D.}$$

§. 136. *Cor.* Dunque se abbiasi un' espressione differenziale della forma $Adx + Bdy$, e sia $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$; tal'espressione dovrà essere l'*esatto* differenziale di una funzione delle due variabili x ed y. In fatti se $Adx + Bdy$ non sia un differenziale esatto; un' altra funzione A' moltiplicata per dx ed aggiunto il prodotto a Bdy dovrà dare per somma un differenziale esatto; cioè dovrà essere $A'dx + Bdy$ un esatto differenziale. E quindi dovrebbe essere (§.135) $\left(\frac{dA'}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$: il che non può aver luogo.

CAP. V.

DEGLI USI PRINCIPALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

PROP. XIX. TEOR. DEL MAC-LAURIN.

§. 137. *Se una qualunque funzione* y *della variabile* x *si svolga nella serie*

$$p+p^{(')}x+p^{('')}x^2+p^{(''')}x^3+\ldots$$

cui termini cominciando dal primo contengano rispettivamente le potenze o, 1^a, 2^a, 3^a, *ec. della variabile* x; *il coefficiente* $p^{(n)}$ *di un qualunque termine di quella serie sarà uguale al fratto*

$$\frac{d^n y}{1.2.3..n dx^n},$$

ove il dx *si sia supposto costante, e fatta la* x *uguale a zero dopo l' ultima differenziazione.*

Dim. Supposto che sia $y=$

$$p+p^{(')}x+p^{('')}x^2+p^{(''')}x^3+\ldots+p^{(n)}x^n+p^{(n+1)}x^{n+1}+\text{ec.} \quad (1)$$

dovrà questa equazione reggere per qualunque valore si dia alla variabile x; e perciò dovrà reggere benanche nel caso, che si faccia $x=0$. Ma facendo $x=0$, quell' equazione riducesi alla seguente

$$y=p.$$

Dunque il primo termine dell' assunta serie pareggia ciò che ne diviene la funzione proposta al farvisi $x=0$. E quindi p sarà zero, o pure una quantità costante. Il perchè differenziando i membri dell' equazione (1), e dividendo per dx, ne dovrà risultare

$$\frac{dy}{dx}=p^{(')}+2p^{('')}x+3p^{(''')}x^2+4p^{('''')}x^3+\ldots \quad (2)$$

E ponendo x uguale a zero in ciascun membro di quest' ultima equazione, si avrà $p^{(')}$ uguale a ciò, che

ne diviene il fratto $\frac{dy}{dx}$ al porvisi $x=0$. Dunque dev'e sere $p^{(')}$ uguale a zero, o a qualche quantità costante E quindi se differenziasi ciascun membro dell'equazion (2) nella supposizione che dx sia costante, e si divi da per $2dx$ l'equazione, che ne risulta, dovrà emer gerne l'altra

$$\frac{d^2y}{2dx^2}=p^{('')}+3p^{(''')}x+2.3.p^{('''')}x^2+\text{ ec.},$$

la quale si trasforma in $\frac{d^2y}{2dx^2}=p^{('')}$ al porvisi $x=0$.

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che si $p^{(''')}$ uguale a ciò che ne diviene il fratto $\frac{d^3y}{2.3dx^2}$, ove il dx si sia supposto costante, e fatta la $x=0$ dopo l'ultima differenziazione; ec. C.B.D.

Esempio. Vogliasi per mezzo del Teorema precedente svolgere in serie la funzione circolare Arc.sen.x *preso nel cerchio del raggio* r.

Suppongasi

$$\text{Arc.sen.}x=p+p^{(')}x+p^{('')}x^2+p^{(''')}x^3+p^{('''')}x^4+\ldots \quad (1)$$

e facciasi in questa equazione $x=0$. Si avrà Arc. sen.0 $=p$. Ma l'è Arc.sen.0=0. Dunque dev'essere $p=0$. E perciò l'equazione (1) di questo esempio si riduce alla seguente

$$\text{Arc.sen.}x=(p')x+p^{('')}x^2+p^{(''')}x^3+p^{('''')}x^4+p^{(''''')}x^5+\text{ec.},$$

la quale differenziata, e poi divisa per dx, ne dà

$$\frac{r}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=p^{(')}+2p^{('')}x+3p^{(''')}x^2+4p^{('''')}x^3+\ldots \quad (2)$$

e facendo $x=0$, si ha $p^{(')}=\frac{r}{\sqrt{r^2}}=1$

Dunque l'equazione (2) è identica alla seguente

$$\frac{r}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=1+2p^{(''')}x+3p^{(''')}x^2+4p^{(''''')}x^3+\text{ec.},$$

che differenziata, e divisa per dx, ne dà

$$\frac{rx}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=2p^{(''')}+2.3p^{(''')}x+3.4p^{(''''')}x^2+\text{ ec. . . . (3)};$$

ove ponendo $x=0$, si ottiene $p^{(''')}=0$.
Ma differenziando ambi i membri dell'equazione (3), e dividendoli per dx, ne risulta

$$\frac{r(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+3rx^2(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(r^2-x^2)^2}=2.3p^{(''')}+2.3.4p^{(''''')}x+\text{ ec.};$$

e facendo $x=0$, si ottiene $\frac{r^4}{r^6}=2.3p^{(''')}$; e quindi $p^{(''')}$ $=\frac{1}{2.3.r^2}$. Similmente si potrà rilevare, che debba essere $p^{(''''')}=0$, $p^{(''''''')}=\frac{1}{2.3.4.5r^4}$, ec. Dunque deve essere

$$\text{Arc.sen.}x=x+\frac{x^3}{2.3.r^2}+\frac{x^5}{2.3.4.5r^4}+\text{ ec.}$$

PROP. XX. TEOR. DEL TAYLOR.

§. 138. *Ogni funzione* y *di* x+ω *può svolgersi in una serie ordinata, i cui termini cominciando dal primo contengano le potenze naturali dell'*ω*, e propriamente dev' essere*

$$y=f(x)+\frac{df(x)}{dx}.\frac{\omega}{1}+\frac{d^2f(x)}{dx^2}.\frac{\omega^2}{1.2}+\frac{d^3f(x)}{dx^2}.\frac{\omega}{1.2.3}+\text{ ec.}$$

Dim. Suppongasi, che sia

$$y=p+p^{(')}\omega+p^{('')}\omega^2+p^{(''')}\omega^3+p^{(''''')}\omega^4+\text{ec. . . . (1)},$$

facendo $\omega=0$, si avrà $y=p$. Ma quando ω è uguale a zero, si ha $f(x+\omega)=f(x)$. Dunque dev' essere $p=f(x)$; e l'equazione (1) si trasforma in questa

$$y=f(x)+p^{(\prime)}\omega+p^{(\prime\prime)}\omega^2+p^{(\prime\prime\prime)}\omega^3+p^{(\prime\prime\prime\prime)}\omega^4+\text{ec.},$$

che differenziata per rapporto ad ω, e divisa per $d\omega$, ne dà

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right)=p^{(\prime)}+2p^{(\prime\prime)}\omega+3p^{(\prime\prime\prime)}\omega^2+4p^{(\prime\prime\prime\prime)}\omega^3+\text{ec},$$

e ponendo $\omega=0$, si ha $p^{(\prime)}$ uguale a ciò che ne diviene $\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$ postavi dopo la differenziazione $\omega=0$. Ma se pongasi $x+\omega=z$, dy ne diviene uguale a $d.f(z)$, che può esibirsi per $dzf'(z)$, ove dz dev' essere uguale a dx, o pure a $d\omega$, secondo che il differenziale di $f(z)$ si prenda per rapporto ad x, ovvero ad ω. Il perchè tanto sarà il differenziale di $f(z)$ preso per rapporto ad x e diviso per dx, che quello di $f(z)$ preso per rapporto ad ω, e diviso per $d\omega$. Dunque essendo $p^{(\prime)}=\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$, fattavi dopo la differenziazione $\omega=0$; dev' essere pure $p^{(\prime)}=\frac{d.f(x)}{dx}$.

E quindi si ha

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right)=\frac{d.f(x)}{dx}+2p^{(\prime\prime)}\omega+3p^{(\prime\prime\prime)}\omega^2+4p^{(\prime\prime\prime\prime)}\omega^3+\text{ec.}$$

e differenziando ambi i membri di quest' ultima equazione rispetto ad ω, e dividendo per $d\omega$, si avrà

$$\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)=2p^{(\prime\prime)}+2.3p^{(\prime\prime\prime)}\omega+\text{ec.},$$

e ponendo $\omega=0$, dovrà risultarne $p^{(\prime\prime)}$ uguale a ciò che ne diviene $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)$ ponendo $\omega=0$. Ma essendo $y=f(x+\omega)=f(z)$; l' è chiaro, che il secondo differenziale di y nella supposizione che dx sia costante debba esserne dinotato $dz^2f''(z)$, ove se il differenziale di z

si prenda per rapporto ad x, si ha l'istesso secondo differenziale di y uguale a $dx^2 f''(z)$, e se prendasi per rapporto ad ω si ha $d\omega^2 f''(z)$, e siccome dividendo il primo per dx^2 e'l secondo per $d\omega^2$ si ha sempre per quoto $f''(z)$, o sia $f''(x+\omega)$; l'è chiaro, che per $\left(\frac{d^2y}{d\omega^2}\right)$, fatto $\omega = 0$ dopo l'ultima differenziazione, possa sostituirsi $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Il perchè dev'essere $p^{(\prime\prime)} = \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che debba essere $p^{(\prime\prime\prime)} = \frac{1}{2.3}.\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, $p^{(\prime\prime\prime\prime)} = \frac{1}{2.3.4}.\frac{d^4f(x)}{dx^4}$, ec. Dunque dev'essere $f(x+\omega) = f(x) + \frac{d.f(x)}{dx}.\frac{\omega}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{\omega^2}{2}$ +ec. C.B.D.

Esempio. Si voglia svolgere $\cos(x+\omega)$ *in una serie, i cui termini contengano le potenze crescenti di* ω.

Quì dev'essere $f(x) = \cos x$, $\frac{d.f(x)}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} x}{r}$,

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{\cos x}{r^2},\quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{\operatorname{sen} x}{r^3},\quad \frac{d^4f(x)}{dx^4} = \frac{\cos x}{r^4},$$

ec, e quindi

$$\cos(x+\omega) = \cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{r}\frac{\omega}{1} - \frac{\cos x}{r^2}\frac{\omega^2}{1.2}$$
$$+ \frac{\operatorname{sen} x}{r^3}.\frac{\omega^3}{2.3} + \frac{\cos x}{r^4}.\frac{\omega^4}{2.3.4} - \text{ec.}$$

La qual serie è la stessa di quella, che si otterrebbe ponendo in $\frac{\cos x \cos\omega - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\omega}{r}$ i valori di cos.ω e sen.ω espressi in serie (§§. 46, 47.)

PROP. XXI. TEOR.

§. 139. *Posto che* s *ne dinoti* (fig. 1.) *un qualunque arco* AB *di una curva piana* ABC, *e che* x *ed* y *ne dinotino le coordinate ortogonali* AD, DB *del punto* B; *dico*, 1.° *che il differenziale* ds *dell'arco* AB *debba esserne dinotato da* $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; 2.° *che la sottangente* DH *sia uguale ad* $\frac{ydx}{dy}$; 3.° *e che la sunnormale* DF *pareggi* $\frac{ydy}{dx}$.

Dim. Par. I. Dal punto D si prenda sulla DF la parte DE, che si dinoti con Δx, e per lo punto E si distenda l'altra semiordinata EC. Di poi per lo punto B si meni la BG parallela ad AF, e si congiunga la BC, la quale si prolunghi sino ad incontrarne la AE nel punto I.

Essendo l'arco $AB=s$, $AD=x$, $BD=y$, e $DE=\Delta x$; sarà l'arco $BC=\Delta s$, $EC=y+\Delta y$, e $CG=\Delta y$. E quindi dev'essere la corda $BC=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$, e'l rapporto della corda BC alla DE ne sarà dinotato da $\frac{\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta x}$, mentre quello dell' arco BC alla DE n'è dinotato da $\frac{\Delta s}{\Delta x}$. Ma il primo rapporto di approssima continuamente al secondo a misura che diminuisce il valore di Δx. Dunque dev' essere

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}\text{; e quindi } ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Par. II. In oltre, essendo il triangolo CGB simile all' altro BDI; dee stare CG:GB::BD.DI, e ne' simboli $\Delta y:\Delta x::y:DI$. Dunque dev' essere $\frac{DI}{y}=\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Or se la DE, e con ciò la BG vada continuamente diminuendo, la retta CBI si andrà continuamente accostando alla tangente BH, finchè la BI coincida colla

BH. Dunque il limite del rapporto di DI ad y adegua quello della sottangente DH ad y. Ma l'è poi il limite del rapporto di $\Delta x:\Delta y$ uguale a $\frac{dx}{dy}$. Dunque dev' essere $\frac{DH}{y}=\frac{dx}{dy}$, e quindi $DH=\frac{ydx}{dy}$.

Par. III. In oltre, poichè sta DH:DB::DB:DF, sarà ne' simboli $\frac{ydx}{dy}:y::y:DF$. Il perchè dev' essere $DF=\frac{ydy}{dx}$ . . . C.B.D.

§. 140. *Cor.* I. E poichè BH^2 pareggia BD^2+DH^2, dev' essere pure

$$BH=\sqrt{\left(y^2+\frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{y^2dy^2+y^2dx^2}{dy^2}\right)},$$

cioè $$BH=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}.$$

§. 141. *Cor.* II. In oltre, essendo $BF^2=BD^2+DF^2$; ponendo i simboli si ha

$$BF^2=y^2+\frac{y^2dy^2}{dx^2}=\frac{y^2}{dx^2}(dx^2+dy^2),\text{ e } BF=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}.$$

Esempio. Determinare la sottangente e la sunnormale dell' ellisse, la cui equazione è

$$y^2=\frac{c^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

Dall' equazione della proposta curva si ha

$$y=\frac{c}{a}\sqrt{(2ax-x^2)},\ dy=\frac{c(adx-xdx)}{a\sqrt{(2ax-x^2)}},\text{ e }\frac{dx}{dy}=\frac{a\sqrt{(2ax-x^2)}}{c(a-x)}$$

Dunque nell' ellisse dev' essere la sottangente

$$\frac{ydx}{dy}=\frac{2ax-x^2}{a-x},$$

e la sunnormale

$$\frac{ydy}{dx}=\frac{c^2(a-x)}{a^2}.$$

§. 142. *Def.* IX. Se al punto (fig. 2) F del perimetro di una curva BDF sia legata l' estremità di un filo flessibile ABDF circondotto alla medesima curva, e di cui l' altro estremo A sia lungo la tangente BA ad un altro punto B di essa; mantenendo sempre teso quel filo, e svolgendolo dalla curva BDF, il punto A dovrà descrivere un' altra curva AHK, di cui la prima BDF dicesi l' *evoluta*, e le parti rette AB, HD,KF del filo chiamansi *raggi dell' evoluta*, *raggi osculatori*, *o raggi di curvatura di* AHK.

PROP. XXII. TEOR.

§. 143. *Se* s *ne dinoti un qualunque arco* AH *della curva* AHK, *ed* x *ed* y *rappresentino rispettivamente le coordinate ortogonali* AP, PH *del punto* H *di essa; dico, che il raggio d' osculo* R *nel punto* H *debba pareggiare ciascuna delle tre seguenti espressioni; cioè dev' essere*

$$R=\frac{dy}{d\frac{dx}{ds}},\ R=\frac{dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d.\frac{dy}{dx}},\ \text{ed } R=\frac{-dx}{d.\frac{dy}{ds}}.$$

Dim. Suppongasi, che due raggi osculatori HD,KF della curva AHK s' incontrino nel punto S, e col centro S e col raggio la retta SM, che ne dinoti il raggio trigonometrico *r*, tra i lati dell' angolo HSK si descriva l' arco circolare MN. Egli è chiaro, che quanto più il punto K si trovi presso al punto H, tanto più il rapporto dell' arco MN all' arco HK della curva si approssimi a quello dell' arco MN all' altro descritto col centro S e col raggio SH. Ma quest' ultimo rapporto adegua quello di *r* : SH, il quale va

continuamente approssimandosi all' altro di r : DH, cioè di r : R. Dunque il rapporto di r : R è il limite del rapporto di MN ad HK. Onde essendo MN uguale ad r.ang. MSN, e l'angolo MSN uguale a KZV–ZVS, o sia a KZV–HVA; sarà l' angolo MSN la differenza finita dell' angolo HVA qualora assumasi la PQ per differenza finita di AP. Dunque dev' essere

$\frac{r}{R}$ il limite del rapporto di $\frac{r\Delta.AVH}{\Delta.AH}$; cioè

$$\frac{r}{R}=\frac{rd.AVH}{ds},$$

ed

$$R=\frac{ds}{d.AVH}\ldots\ (1)$$

Or poichè l'angolo AVH pareggia il suo alterno VHL, e questo aggiunto all' altro KHL fa un retto; perciò dev' essere l' angolo LKH uguale all' altro HVP. Il perchè dee stare

$$ds:dx::r:\text{sen. AVH}$$

e

$$ds:dy::r:\text{cos. AVH}.$$

Ma dalla prima di queste due analogie si ha sen. AVH$=\frac{rdx}{ds}$, e d.AVH cos.AVH$=rd.\frac{dx}{ds}$, e della seconda si ha cos.AVH$=\frac{rdy}{ds}$. Dunque dev' essere

$$d.AVH.\frac{rdy}{ds}=rd.\frac{dx}{ds},$$

o sia

$$d.AVH=\frac{dsd.\frac{dx}{ds}}{dy}.$$

Il perchè se nell' equazione (1) in luogo di d AVH si sostituisca il secondo membro di quest' ultima, dovrà risultarne

$$R=\frac{dy}{d.\frac{dx}{ds}}\ldots(2)$$

In oltre, essendo $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ovvero

$ds=dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, dev' essere $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$,

e quindi $$d.\frac{dx}{ds}=\frac{-dyd^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

e perciò $$R=\frac{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d^2y}=\frac{dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d.\frac{dy}{dx}}\ldots(3)$$

Finalmente, essendo $\cos.AVH=\frac{rdy}{ds}$, dev' essere

$$-d.AVH\,\mathrm{sen}AVH=rd.\frac{dy}{ds}.$$

Ma sen AVH pareggia $\frac{rdx}{ds}$. Dunque dev' essere

$$-d.AVH.\frac{rdx}{ds}=rd.\frac{dy}{ds},$$

o $$d.AVH=\frac{-dsd.\frac{dy}{ds}}{dx}.$$

Il perchè se nel secondo membro dell' equazione (1) per $d.AVH$ si sostituisca il secondo membro di quest' ultima equazione, si avrà

$$R=\frac{-dx}{d.\frac{dy}{dx}}\ldots(4)\ldots C.B.D.$$

PROP. XXIII. PROBL.

§. 144. *Determinare il raggio d' osculo nella parabola conica.*

Sol. Sia $2a$ il parametro dell'asse (fig. 2.) AR della parabola conica AHK, e si ponga l' ascissa AP$=x$, e la semiordinata PH$=y$. Sarà, per la natura della parabola, $y^2=2ax$, e quindi $y=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. Dunque dev' essere $dy=\frac{(2a)^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{(2a)^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$,

$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2a}{4x}=\frac{a}{2x}$, ed $1+\frac{dy^2}{dx^2}=1+\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2x}$.

Il perchè dev' essere pure

$$d.\frac{dy}{dx}=\frac{-(2a)^{\frac{1}{2}}dx}{4x.x^{\frac{1}{2}}}=\frac{-a^{\frac{1}{2}}dx}{(2x)^{\frac{3}{2}}},$$

ed $$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{2x+a}{2x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

E quindi il raggio d'osculo R della parabola, o sia l'espressione $\frac{-dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{d\frac{dy}{dx}}$ nella parabola dee pareggiare

$-dx\left(\frac{2x+a}{2x}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{-a^{\frac{1}{2}}dx}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$, cioè $\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$. C.B.F.

§. 145. *Cor.* Poichè nel vertice principale A della parabola l' ascissa x è uguale a zero; il raggio d' osculo in tal punto dovrà esserne dinotato da $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, cioè

da a. Dunque *il raggio d' osculo nel vertice principale della parabola pareggia la metà del parametro dell' asse.*

PROP. XXIV. PROBL.

§. 146. *Determinare l' evoluta della parabola conica.*

Sol. Dinoti BDF l' evoluta della parabola conica AHK, e da un qualunque punto D del perimetro di quella si meni all' asse AR di questa la perpendicolare DR, e per D si distenda pure la retta DE parallela ad AR, che ne incontri la retta HP nel punto E. Dovrà essere AB$=a$ (§. 145.). Intanto si facciano le stesse indicazioni del Problema precedente, e si ponga BR$=t$, e DR$=u$. Sarà la sunnormale

$PV=\frac{ydy}{dx}=\frac{adx}{dx}=a$, la normale $HV=\sqrt{(2ax+a^2)}$, e 'l raggio d' osculo $HD=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$. Ma pe' triangoli simili HVP, HDE, sta HV : VP : : HD : DE, e ne' simboli $\sqrt{(2ax+a^2)} : a :: \frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$: DE. Dunque dev' essere DE, o sia $PR=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}.a}{\sqrt{a}.\sqrt{a}(2x+a)}=2x+a$.

Ma l' è $AP=x$, ed $AB=a$, e quindi $BP=x-a$. Dunque dev' essere $BR=x-a+2x+a$, o sia $t=3x$.

In oltre, essendo $HD=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$, ed $HV=\sqrt{(2ax+a^2)}$;

sarà $VD=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}-\sqrt{(a)(2x+a)}=\frac{(2x+a)^{\frac{3}{2}}-a(2x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$,

o sia $VD=\frac{(2x+a)(2x+a)^{\frac{1}{2}}-a(2x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}=\frac{2x(2x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$.

Ma sta HV : VD :: HP : PE , e ne'simboli $\sqrt{(a)(2x+a)}$: $\frac{2x(2x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$ :: $\sqrt{2ax}$: PE. Dunque dev'essere PE, o sia

$$DR=\frac{2x\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$$

Il perchè essendo DR$=u$, sarà pure $u=\frac{2x\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$. Ma l'è poi $2x=\frac{2t}{3}$. Dunque dev' essere $u=\frac{2t\sqrt{2t}}{3\sqrt{3a}}$, ed $u^2=\frac{8t^3}{27a}$; cioè $27au^2=8t^3$, ch' è l' equazione alla seconda parabola cubica. C. B. F.

C A P. VI.

CONTINUAZIONE DELLO STESSO ARGOMENTO.

PROP. XXV. TEOR.

§. 147. *Se* x *ed* y *ne dinotino rispettivamente le coordinate ortogonali di una curva ; la tangente dell' angolo formato dalla tangente di essa curva coll' asse delle ascisse pareggia* $\frac{dy}{dx}$, *posto il raggio trigonometrico uguale ad* 1.

Dim. Poichè la sottangente di una curva sta alla semiordinata corrispondente come il raggio alla tangente dell' angolo fatto dall' asse delle ascisse colla tangente , ed è la sottangente generalmente dinotata da $\frac{ydx}{dy}$ (§. 139.); dovrà stare $\frac{ydx}{dy}$: y : : 1 alla tangente dell' angolo fatto dalla tangente della curva coll' asse delle ascisse. Il perchè dev' essere la tangente di tale angolo uguale a $\frac{dy}{dx}$. C.B.D.

§. 148. *Cor.* I. E quindi se l'angolo fatto dall' asse di una curva colla tangente a questa sia nullo, dovrà essere $\frac{dy}{dx} = o$; e viceversa. Ma quando svanisce l'angolo fatto dalla tangente coll' asse, la tangente ne diviene parallela all' asse. Dunque se in un punto di una curva ne sia $\frac{dy}{dx}=o$, la tangente alla curva in quel punto dovrà essere parallela all' asse. E viceversa, il punto della curva, nel quale ha luogo l'equazione $\frac{dy}{dx}=o$, dev' essere quello, pel quale la tangente condotta alla curva è parallela all' asse delle ascisse.

§. 149. *Cor.* II. Ma quando la tangente di una curva è parallela all'asse delle ascisse, la semiordinata condotta all' asse dal punto del contatto è maggiore o minore tanto della precedente, che della seguente semiordinata, come apparisce dalle figure 3 e 4, ed essa perciò ha il *massimo* ovvero il *minimo* valore. Dunque affinchè la semiordinata y di una curva giunga al suo massimo o al suo minimo valore, dev' essere $\frac{dy}{dx}=o$.

§. 150. *Cor.* III. E poichè l' ordinata y di una curva è una certa funzione dell' ascissa x; l'è manifesto, che una qualunque funzione y della variabile x ne giunga al suo massimo ovvero al suo minimo valore allor che ne diviene $\frac{dy}{dx}=o$.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 151. *Sia y una qualunque funzione della variabile* x; *saggiare se possa divenirne un massimo ovvero un minimo, ed in quali casi ciò debba aver luogo.*

Sol. Sia $y=f(x)$. Egli è chiaro, che se ω dinoti una quantità picciolissima, nel caso che y sia un mas-

simo, debba essere y non solo maggiore del valore, che si acquista quando x ne diviene $x-\omega$, ma benanche maggiore del valore, che prende quando x ne diviene $x+\omega$ (§. 149) : e nel caso di y minimo, debba essere y minore tanto del primo di que' due valori, che del secondo. Ora supposto, che il primo di tali valori sia dinotato da y', e 'l secondo da y''; dev' essere $y'=f(x-\omega)$, ed $y''=f(x+\omega)$. Il perchè, sviluppando i secondi membri di queste due equazioni pel Teorema di Taylor, si avrà

$$y'=f(x)-\frac{\omega}{1}\cdot\frac{df(x)}{dx}+\frac{\omega^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\frac{\omega^3.d^3f(x)}{1.2.3\,dx^3}+\text{ec.}$$

ed

$$y''=f(x)+\frac{\omega.}{1}\frac{df(x)}{dx}+\frac{\omega^2}{1.2}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\text{ec.}$$

o sia

$$y'=y-\frac{\omega}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{\omega^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\omega^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{\omega^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}-\text{ec.}$$

$$y''=y+\frac{\omega}{1}\frac{dy}{dx}+\frac{\omega^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^3}{1.2.3}\cdot\frac{dy^3}{dx^3}+\frac{\omega^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{d^4x}+\text{ec.}$$

Ora affinchè sia y maggiore tanto di y', che di y'', o pure minore sì di y' che di y'', dev' essere

(§. 149.) $\frac{dy}{dx}=0$. E quindi si ha

$$y'=y+\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$$

ed $$y''=y+\frac{\omega^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ec.}$$

Intanto essendo ω^3 una quantità picciolissima rispetto ad ω^2, dev' essere $\frac{\omega^3d^3y}{2.3dx^3}$ trascurabile per rapporto ad $\frac{\omega^2d^2y}{2dx^2}$. Dunque affinchè y sia maggiore tanto di y',

che di y'', conviene che sia $\frac{d^2y}{dx^2}$ una quantità negativa : ed affinchè y sia minore tanto di y', che di y'', dev' essere $\frac{d^2y}{dx^2}$ una quantità positiva. Che se sia uguale a zero tanto $\frac{dy}{dx}$, che $\frac{d^2y}{dx^2}$, senza che svanisca $\frac{d^3y}{dx^3}$, in tal caso non vi sarà nè massimo nè minimo ; poichè la y risulta maggiore di una e minore dell' altra delle due quantità y' ed y''. E se $\frac{d^3y}{dx^3}$ sia uguale a zero, e $\frac{d^4y}{dx^4}$ sia una quantità negativa, la y sarà un massimo ; e sarà un minimo, se $\frac{d^4y}{dx^4}$ sia una quantità positiva : ec. . . C.B.F.

PROP. XXVII. PROBL.

§. 152. *Data una sfera, inscrivere in essa il massimo cono retto.*

Sol. Sia a il raggio (fig. 5) GA della data sfera ABCD, e supposto in essa inscritto il cono retto ABFD; sarà il centro E della base di questo nel diametro AC disteso pel vertice A. Il perchè se pongasi l' ascissa GE dal centro uguale ad x, e si dinoti con $r : p$ il rapporto del raggio alla periferia di un cerchio ; dovrà essere $AE=a+x$, e 'l rettangolo di AE in EC, ovvero il quadrato di EB sarà uguale ad a^2-x^2. Ma il diametro sta alla periferia di un cerchio, come il quadrato del raggio alla superficie del cerchio. Dunque dee stare $2r : p :: a^2-x^2$ a $\frac{p(a^2-x^2)}{2r}$, che sarà uguale alla superficie del cerchio BFD. E quindi il volume del cono ABFD dovrà pareggiare l' espressione

$\frac{p(a^2-x^2)}{2r}\times\frac{(a+x)}{3}$, cioè $\frac{p(a^3-ax^2+a^2x-x^3)}{6r}$, che potrà dinotarsi con y. Dunque nel caso atttuale dev' essere

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p(-2ax+a^2-3x^2)}{6r}=0.$$

E perciò dev' essere pure

$$3x^2+2ax-a^2=0\,,$$

o sia $$x^2+\frac{2a}{3}x-\frac{a^2}{3}=0\,,$$

ed $$x=\frac{-a}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{3}\right)}=\frac{-a}{3}\pm\sqrt{\frac{4a^2}{9}}\,;$$

cioè $$x=\frac{-a}{3}\pm\frac{2a}{3}.$$

Vale a dire, che per divenirne y un massimo ovvero un minimo convien che sia $x=\frac{a}{3}$, o pure $x=-a$. Ma essendo $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{6r}(-2ax+a^2-3x^2)$, dev' essere pure

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{6r}(-2a-6x)\,,\ \ldots\ (1)$$

e ponendo per x il fratto $\frac{a}{3}$, si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{6r}(-2a-2a)=\frac{p}{6r}.-4a\,,$$

ch' è una quantità negativa; e ponendo $-a$ in luogo di x nell' equazione (1) si ha

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{6r}(-2a+6a)=\frac{p}{6r}.\ 4a\,,$$

ch' è una quantità positiva. Dunque il massimo de' coni

retti, che si possono inscrivere nella sfera del raggio a, l'è quello, la cui altezza pareggia $a+\frac{a}{3}$. C.B.F.

PROP. XXVIII. PROBL.

§. 153. *Dato un punto* (fig.6) P *dentro dell' angolo rèttilineo* ABC; *fa duopo distendere per esso una retta* APD, *tal che il triangolo* ABD *sia un minimo.*

Sol. Pel dato punto P si distenda la retta PE parallela alla BC, e dal punto D si meni la perpendicolare DF sulla AB. Saranno date le PE, EB, e sarà pure data la ragione di BD a DF. Il perchè se pongasi $BE=a$, $PE=c$, $EA=x$, e si dinoti con $m:n$ la ragione di BD : DF; si ha $AB=a+x$, e pe' triangoli simili AEP, ABD dee stare AE : EP : : AB : BD, cioè ne' simboli $x:c::a+x:BD$, che dev' essere uguale a $\frac{c(a+x)}{x}$. E quindi essendo $m:n$ come BD, o sia $\frac{c(a+x)}{x}$ a DF, si ha pure $DF=\frac{nc(a+x)}{mx}$. Ma il triangolo BAD adegua $\frac{1}{2}$ BA×DF. Dunque dev' essere lo stesso triangolo uguale ad

$$\left(\frac{a+x}{2}\right)\frac{nc(a+x)}{mx},$$

o sia all' espressione

$$\frac{nc}{2m}\cdot\frac{(a+x)^2}{x},$$

che si dinoti con y. E quindi dev' essere

$$\frac{dy}{dx}=\frac{nc}{2m}\cdot\frac{x^2-a^2}{x^2}=0\ \ldots\ (1);$$

cioè $x=\pm a$. Ma differenziando l' equazione (1) si ottiene la seguente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{nc}{2m}\cdot\frac{2a^2}{x^3},$$

di cui il secondo membro è positivo o negativo secondo che per x vi si sostituisca $+a$ o pure $-a$: e ponendo $x=-a$ la retta APD dee passare pel punto B, e non si forma il triangolo ABD. Dunque affinchè il triangolo ABD sia un minimo, l'è mestieri distendere pel punto P la retta PE parallela a BD, e prendere la EA uguale ad EB. C.B.F.

PROP. XXIX. PROBL.

§. 154. *Esibire il differenziale dell' aja di una curva, di cui ne sia data l'equazione; quello della superficie generata dalla rivoluzione di essa curva intorno all' asse; e quello del solido generato dalla superficie della medesima rivolgendosi intorno all' asse.*

Sol. Par. I. Sia (fig. 7.) AED una curva rapportata all' asse AC, e di cui l' ascissa AB si dinoti con x, e la corrispondente semiordinata EB con y, e sia il trilineo AEB uguale ad S. Intanto si prenda la $BC=\Delta x$, e per C si distenda la semiordinata CD. In oltre dal punto A si elevi ad AC la perpendicolare AK, che si dinoti con a, e pe' punti K ed E si distendano le rette KG, EL parallele ad AC, che ne incontrino la CD nei punti G ed L, e si congiunga la DE. Dovrà essere $CD=y+\Delta y$, $DL=\Delta y$, il triangolo $DLE=\frac{1}{2}\Delta x\Delta y$, il rettangolo $BCLE=y\Delta x$, il trapezio $CDEB=y\Delta x+\frac{1}{2}\Delta x\Delta y$, il rettangolo $BCGH=a\Delta x$, e 'l quadrilatero $CDOEB=\Delta S$. Dunque il rapporto del quadrilatero BCDOE al rettangolo CGHB dev' esserne dinotato da $\frac{\Delta S}{a\Delta x}$; laddove quello del trapezio BCDE al rettangolo CGHB ne vien dino-ato da $\frac{y\Delta x+\frac{1}{2}\Delta y\Delta x}{a\Delta x}$. Ma a misura che il punto C si avvicina all' altro B il secondo rapporto si appros-

sima al primo, che di esso n'è il limite. Dunque prendendo i limiti del precedente rapporto si ha

$$\frac{dS}{adx}=\frac{y}{a}\text{; cioè } ds=ydx.$$

Par. II. In oltre, si dinoti con $r:p$ il rapporto del raggio di un cerchio alla sua periferia. Dovrà essere la periferia del cerchio, che ha per raggio BE uguale a $\frac{py}{r}$, quella del raggio CD uguale a $\frac{p(y+\Delta y)}{r}$, e quella del raggio HB ugnale a $\frac{pa}{r}$. Dunqe dev' essere la superficie del cono tronco generato dal quadrilatero CDEB rivolgendosi intorno a BC, $\frac{p(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta^2 y)}}{2r}$, e quella del cilindro generato dal rettangolo BHGC rivolgendosi pure intorno a BC uguale a $\frac{pa\Delta x}{r}$. Ma se con G si dinoti la superficie generata dall' arco AE rivolgendosi intorno ad AC, dev' essere ΔG quella, che in tal rivoluzione vien generata dall' arco EOD, ed al rapporto di ΔG a $\frac{pa\Delta x}{r}$ si approssima continuamente quello di $\frac{p(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{2r}$ a $\frac{pa\Delta x}{r}$. Dunque, prendendo i limiti, si avrà

$$\frac{rdG}{padx}=\frac{py\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{padx};$$

e quindi $$dG=\frac{py\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{r}.$$

Par. III. Finalmente, si prolunghi la DE finchè ne incontri l'asse AC della curva nel punto F, e si di-

noti con V il volume del solido generato dal trilineo AEB rivolgendosi intorno ad AB, e si facciano le altre indicazioni come sopra. Dovrà essere il cerchio del raggio DC uguale a $\frac{p(y+\Delta y)^2}{2r}$, quello del raggio EB uguale a $\frac{py^2}{2r}$, e l'altro del raggio BH uguale a $\frac{pa^2}{2r}$. Ma per esserne il triangolo DLE simile tanto al triangolo DCF, che all' altro EBF, sta $\Delta y : \Delta x :: y+\Delta y : CF$, e $\Delta y : \Delta x :: y : BF$. Dunque dev' essere $CF = \frac{(y+\Delta y)\Delta x}{\Delta y}$, e $BF = \frac{y\Delta x}{\Delta y}$. E perciò il cono generato dal triangolo DCF rivolgendosi intorno a CF dev' esserne dinotato da $\frac{p(y+\Delta y)^3\Delta x}{2.3r\Delta y}$, quello generato dal triangolo EBF rivolgendosi intorno a BF da $\frac{py^3\Delta x}{2.3r\Delta y}$, e 'l cilindro generato dal rettangolo BCGH rivolgendosi intorno a BC sarà uguale a $\frac{pa^2\Delta x}{2r}$. Il perchè dev'essere il cono tronco generato dal trapezio CDEB rivolgendosi intorno a CB uguale a $\frac{p(y+\Delta y)^3\Delta x}{2.3r\Delta y} - \frac{py^3\Delta x}{2.3r\Delta y}$, cioè a

$$\frac{3py^2\Delta y\Delta x + 3py\Delta y^2\Delta x + p\Delta y^3\Delta x}{2.3r\Delta y},$$

e 'l rapporto di un tal cono tronco al cilindro generato dal rettangolo BCGH dev' esserne dinotato da

$$\frac{3py^2\Delta y\Delta x + 3py\Delta y^2\Delta x + p\Delta y^3\Delta x}{3pa^2\Delta y\Delta x},$$

che si approssima continuamente ad $\frac{y^2}{a^2}$ a misura che

diminuisce il Δx. Ma un tal rapporto si approssima pure a quello di ΔV a $\frac{pa^2\Delta x}{2r}$ a misura che diminuisce il Δx. Dunque prendendo i limiti di detti rapporti, dovrà risultarne

$$\frac{2rdV}{pa^2dx} = \frac{y^2}{a^2}, \text{ e quindi } dV = \frac{py^2dx}{2r} \ldots \text{C.B.F.}$$

SAGGIO
DI
CALCOLO INTEGRALE

CAP. I.

NOZIONI PRELIMINARI.

§. 155. *Def.* I. Il *calcolo integrale* è quel ramo dell'analisi moderna, che ha per oggetto di determinare le funzioni di una o più quantità variabili, di cui ne son dati i differenziali.

§. 156. *Def.* II. L'*integrale* di una formola differenziale è quell'altra formola, che differenziata ne dà la proposta: e l'operazione, onde perviensi a determinare un tale integrale, chiamasi *integrazione*.

§. 157. *Post.* I. Qualora di una formola differenziale se ne debba prendere l'integrale, tale operazione da farsi ne sarà dinotata prefiggendo la lettera $\int$, che pronunciasi *sommatorio*, alla formola da integrarsi.

Così volendo dinotare, che della formola $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ se ne debba prendere l'integrale, si scriverà

$$\int \frac{ydx-xdy.}{y^2}$$

§. 158. *Cor.* E poichè il differenziale di una qualunque funzione adegua quello della medesima funzione aumentata o pur diminuita di una quantità costante (§. 106.); l'è chiaro, che per dinotare generalmente l'integrale di una formola differenziale debbasi ad esso aggiungere una quantità costante, che ne sarà generalmente rappresentata dalla lettera C.

§. 159. *Def.* III. L'integrale di una formola differen-

ziale si dirà *completo* se ad esso aggiungasi un'arbitraria costante.

§. 160. *Def.* IV. La *debita costante* di un integrale è quella, il cui valore siasi determinato dalle condizioni del Problema, dal quale lo stesso integrale n'è risultato.

Esempio. Suppongasi, che in risolvendo un Problema siasi ottenuta l'equazione $y=\int Xdx+C$, e che facendosi $x=a$, ne risulti $\int Xdx=B$, ed $y=A$. Sarà $A=B+C$. Dunque dev'essere $C=A-B$; e perciò $A-B$ è la debita costante da aggiungersi all'integrale di Xdx.

CAP. II.

DELLE INTEGRAZIONI DE' MONOMII DIFFERENZIALI, E DE' ALTRE FORMOLE, CHE NE DIPENDONO.

PROP. I. TEOR.

§. 161. *Supposto che* n *dinoti un qualunque numero, che non sia* -1; *l'integrale del prodotto di una quantità costante per la potenza* n *di una variabile* x *e per lo differenziale* dx *della stessa variabile si ottiene aumentando l'esponente* n *della variabile di* 1, *e dividendo l'espressione, che ne risulta per* $(n+1)\,dx$. *Cioè dovrà essere*

$$\int Ax^n dx=\frac{Ax^{n+1}dx}{(n+1)dx}+C=\frac{Ax^{n+1}}{n+1}+C$$

Che se n *sia uguale a* -1; *l'integrale di quel prodotto sarà uguale alla quantità costante multiplicata pel logaritmo iperbolico della variabile. Cioè dovrà essere* $\int\frac{Adx}{x}=\int Ax^{-1}dx=AL.x+C.$

Dim. La verità della 1ª. Parte di questo Teorema si rileva dal §. 112, e quella della seconda da ciò che si è dimostrato nel §. 109.

§. 162. *Cor.* I. Dunque supposto che niuna delle quantità m,n,r sia uguale a -1, per la prima parte del Teorema precedente dovrà essere

$$\int dx(ax^m+bx^n+cx^r)=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}+\frac{cx^{r+1}}{r+1}+C.$$

E ponendo $m=3, n=-2, r=-4$, la precedente equazione si trasformerà nella seguente

$$\int dx\left(ax^3+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^4}\right)=\frac{ax^4}{4}-\frac{b}{x}-\frac{c}{3x^3}+C.$$

§. 163. *Cor.* II. E perciò qualora vogliasi l' integrale di un fratto, di cui il numeratore sia il differenziale di una variabile, e'l denominatore sia la variabile stessa elevata ad un esponente diverso da 1, per integrare un tal fratto per mezzo della Par. I. del Teor. prec. sarà mestiere esibirlo sotto forma intiera, che abbia negativo l' esponente della variabile.

§. 164. *Cor.* III. Che se il differenziale della variabile si trovi multiplicato o diviso per una radice qualunque di una qualsivoglia potenza della medesima variabile; l' integrale di un tal prodotto o quoziente si otterrà benanche per mezzo della 1ª Parte del Teorema precedente coll' esibire quel radicale sotto forma di grandezza, che ha l' esponente fratto positivo o negativo. Ed eccone di queste cose i seguenti esempii

Formole da integrarsi *Integrali*

$$\int\frac{Adx}{x^3}=\int Ax^{-3}dx=\frac{Ax^{-2}}{-2}+C=\frac{-A}{2x^2}+C$$

$$\int Adx\sqrt[3]{x^2}=\int Ax^{\frac{2}{3}}dx=\frac{Ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{3Ax^{\frac{5}{3}}}{5}+C=\frac{3Ax\sqrt[3]{x^2}}{5}+C$$

$$\int\frac{Adx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int\frac{Adx}{x^{\frac{2}{3}}}=\int Ax^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{Ax^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=3A\sqrt[3]{x}+C$$

PROP. II. TEOR.

§. 165. *Se* X *ne dinoti una qualunque funzione della variabile* x, *dovrà essere*

$$\int AX^n dX = \frac{AX^{n+1}}{n+1} + C, \text{ e } \int \frac{AdX}{X} = AL.X + C.$$

Dim. Queste verità si rilevano dal Teorema precedente.

PROP. III. TEOR.

§. 166. *La formola* $Ax^{\lambda}dx(a+bx)^{s}$, *ch'è il prodotto del monomio differenziale* $Ax^{\lambda}dx$ *per la potenza* s *del binomio lineare* a+bx, *l' è sempre integrabile, purchè sia un numero intiero positivo l' uno de' due esponenti* s *e* λ.

Dim. Cas. I. Poichè se s ne dinoti un numero intiero positivo, il prodotto di $Ax^{\lambda}dx$ per la potenza s del binomio $a+bx$ dovrà contenere il numero s+1 di termini, di cui ciascuno dev' essere della forma $px^{n}dx$, che può integrarsi pel §. 161. E quindi la somma degl'integrali di tutti que' termini aggiunta ad una quantità costante sarà l' integrale completo della proposta formola.

Cas. II. Che se poi sia λ un numero intiero positivo ed s un fratto positivo o negativo, o anche un numero intiero negativo; ponendo la nuova variabile y uguale ad $a+bx$, dovrà risultarne $\frac{y-a}{b}=x$, $\frac{dy}{b}=dx$, $\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\lambda}=x^{\lambda}$, ed $y^{s}=(a+bx)^{s}$. E quindi si avrà

$$Ax^{\lambda}dx\left(a+bx\right)^{s}=A\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\lambda}\frac{dy}{b}\,y^{s},$$

cioè $$Ax^{\lambda}dx(a+bx)^{\varepsilon}=\frac{A}{b^{\lambda+1}}\cdot y^{\varepsilon}dy(y-a)^{\lambda}.$$

Ma, per esserne λ un numero intiero positivo, il secondo membro di quest' ultima equazione si può integrare pel Cas. I. Dunque se in tale integrale si ponga $a+bx$ in luogo di y, si avrà quella funzione di x, il cui differenziale pareggia la proposta formola. C.B.D.

§. 167. *Cor.* E quindi se λ sia zero, ed ε un qualunque numero, sarà sempre integrabile la formola

$Adx(a+bx)^{\varepsilon}$.

Esempio. Esibire l' integrale della formola

$$Ax^2dx(a-bx)^{-\frac{2}{3}}.$$

Si ponga $a-bx=u$. Dovrà essere

$$(a-bx)^{-\frac{2}{3}}=u^{-\frac{2}{3}},\ x=\frac{a-u}{b},\ x^2=\left(\frac{a-u}{b}\right)^2,\ \text{e}\ dx=\frac{-du}{b}.$$

Dunque dev' essere

$$Ax^2dx(a-bx)^{-\frac{2}{3}}=\frac{-Au^{-\frac{2}{3}}du}{b^3}(a-u)^2,$$

cioè $$Ax^2dx(a-bx)^{-\frac{2}{3}}=\frac{-Aa^2}{b^3}u^{-\frac{2}{3}}du$$
$$+\frac{2Aa}{b^3}u^{\frac{1}{3}}du-\frac{A}{b^3}u^{\frac{4}{3}}du$$

Ma l' integrale del secondo membro di quest' ultima equazione adegua (§. 161.)

$$\frac{-3Aa^2u^{\frac{1}{3}}}{b^3}+\frac{6Aau^{\frac{4}{3}}}{4b^3}-\frac{3Au^{\frac{7}{3}}}{7b^3}+C,$$

che riducesi a

$$-\frac{3Aa^2(a-bx)^{\frac{1}{3}}}{b^3}+\frac{3Aa(a-x)^{\frac{4}{3}}}{2b^3}-\frac{3A(a-bx)^{\frac{7}{3}}}{7b^3}+C,$$

qualora vi si sostituisca $a-bx$ in luogo di u. Dunque quest' ultima espressione dev' essere l' integrale di

$$Ax^2dx(a-bx)^{-\frac{2}{3}}.$$

PROP. IV. TEOR.

§. 168. *Il fratto genuino* $\frac{(A+Bx+Cx^2+\ldots Px^r)dx}{(x^2+2ax+c^2)^n}$ *sarà integrabile pel Teorema precedente, se sieno reali i fattori del trinomio* $x^2+2ax+c^2$.

Dim. Poichè se con p e q si dinotino le due radici reali dell' equazione $x^2+2ax+c^2=0$, dev' essere $(x^2+2ax+c^2)^n=(x-p)^n(x-q)^n$; e quindi il fratto proposto potrà esibirsi sotto la seguente forma

$$\frac{(A+Bx+Cx^2\ldots+Px^r)dx}{(x-p)^n(x-q)^n},$$

che potrà risolversi in parziali (§. 83) delle seguenti forme

$$\frac{Mdx}{(x-p)^n},\ \frac{M'dx}{(x-p)^{n-1}},\ \ldots\ \frac{Ndx}{(x-q)^n},\ \frac{N'dx}{(x-q)^{n-1}},\ \text{ec,}$$

ciascuna delle quali è della forma $Adx(a+bx)^\epsilon$, ove ϵ è un numero intiero negativo, e perciò esse si potranno integrare pel §. prec. Dunque la somma degli integrali di dette frazioni dee pareggiare l' integrale della frazione proposta. C. B. D.

§. 169. *Scol.* Se la frazione $\frac{(A+Bx+Cx^2+\ldots Px^r)dx}{(x^2+2ax+c^2)^n}$ sia spuria, il che si rileva dall' essere r non minore di $2n$; in tal caso essa potrà risolversi nella somma di un' espressione intiera della forma $(A'+B'x+\text{ec.}+P'x^{r-2n})dx$, e di un fratto genuino della forma esibita nel Teorema precedente. Il perchè essendo integrabile l' espressione $(A'+B'x+C'x^2+\ldots+P'x^{r-2n})dx$ pel §. 161, e 'l fratto genuino pel Teo-

rema precedente; la somma de' due integrali dovrà essere quella del fratto spurio proposto.

Esempio. Vogliasi l' integrale del fratto spurio $\frac{(2-3x^2+4x^3+3x^5)dx}{(x^2+2x-3)^2}$, *di cui i fattori del denominatore sono* $(x-1)^2$, *ed* $(x+3)^2$.

Si divida il polinomio $3x^5+4x^3-3x^2+2$ per $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$, ch'è il quadrato di x^2+2x-3. Si avrà $3x-12$ per quoto, e $58x^3+9x^2-171x+110$ per residuo. Dunque il proposto fratto spurio dee pareggiare il prodotto di dx per

$$3x-12+\frac{58x^3+9x^2-171x+110}{(x-1)^2(x+3)^2}.$$

Ma il fratto $\frac{58x^3+9x^2-171x+110}{(x-1)^2(x+3)^2}$ risoluto nelle sue parziali trovasi uguale a

$$\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{9}{8(x-1)}+\frac{455x+934}{8(x+3)^2}.$$

Dunque dev' essere

$$\frac{(2-3x^2+4x^3+3x^5)dx}{(x^2+2x-3)^2}=(3x-12)dx+\frac{3dx}{8(x-1)^2}+\frac{9dx}{8(x-1)}$$
$$+\frac{455xdx}{8(x+3)^2}+\frac{934dx}{8(x+3)^2}.$$

Ma sono integrabili per le cose precedenti i termini del secondo membro di quest'ultima equazione. Dunque la somma degl' integrali di essi dev' essere l' integrale della proposta frazione.

CAP. III.

DELL' INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI ALGEBRICHE FRATTE.

PROP. V. TEOR.

§. 170. *L' integrale del fratto* $\frac{dx}{1+x^2}$ *pareggia* Arc. tang. x *preso nel cerchio del raggio* 1.

Dim. La verità di questa Prop. si rileva da quanto si è esposto nel §. 118.

§. 171. *Cor.* Essendo $\frac{adx}{m+nx^2}$ uguale ad $\frac{a}{\sqrt{mn}}$ $\frac{dx\sqrt{\frac{n}{m}}}{1+\frac{nx^2}{m}}$; ponendo $z=x\sqrt{\frac{n}{m}}$, si avrà $dz=dx\sqrt{\frac{n}{m}}$, $z^2=\frac{nx}{m}$, e 'l fratto proposto si ridurrà ad $\frac{a}{\sqrt{mn}}$. $\frac{dz}{1+z^2}$, il cui integrale pareggia $\frac{a}{\sqrt{mn}}$. Arc. tang. z. Dunque dev' essere

$$\int\frac{adx}{m+nx^2}=\frac{a}{\sqrt{mn}}\text{Arc. tang. }x\sqrt{\frac{n}{m}}+C.$$

PROP. VI. TEOR.

§. 172. *L' integrazione del fratto* $\frac{dx}{(1+x^2)^r}$, *ove* r *è un numero intiero maggiore di* 1, *dipende da quella dell' altro* $\frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}}$, *che del primo è più semplice.*

Dim. Suppongasi esserne

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^r}=\frac{A+Bx}{(1+x^2)^{r-1}}+\int\frac{Cdx}{(1+x^2)^{r-1}}\ldots\ldots(1)$$

Egli è chiaro, che differenziando ambi i membri di questa equazione, debba risultarne

$$\frac{dx}{(1+x^2)^r}=\frac{(1+x^2)^{r-1}Bdx-(2r-2)(A+Bx)xdx(1+x^2)^{r-2}}{(1+x^2)^{2r-2}}$$
$$+\frac{Cdx}{(1+x^2)^{r-1}},$$

o sia

$$\frac{dx}{(1+x^2)^r}=\frac{(1+x^2)Bdx-(2r-2)(A+Bx)xdx}{(1+x^2)^r}+\frac{Cdx}{(1+x^2)^{r-1}},$$

e dividendo l'uno e l'altro membro per $\frac{dx}{(1+x^2)^r}$, si avrà $1=B+Bx^2-2Arx+2Ax-2Brx^2+2Bx^2+C+Cx^2$.

E pareggiando i coefficienti de' termini analoghi, ne dovranno risultare le tre seguenti equazioni; cioè

$$B+C=1,\qquad -2Ar+2A=0,\qquad B-2Br+2B+C=0;$$

dalle quali si ha

$$A=0,\qquad B=\frac{1}{2r-2},\ \text{e}\qquad C=\frac{2r-3}{2r-2}.$$

Dunque se nell'equazione (1) si sostituiscano questi valori di A, B, C, si ottiene la seguente

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^r}=\frac{x}{(2r-2)(1+x^2)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2r-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}}\ldots(2);$$

dalla quale si rileva, che l'integrazione del fratto $\frac{dx}{(1+x^2)^r}$ dipende da quella dell'altro $\frac{dx}{(1+x^2)^{r-1}}$, che è più semplice di esso. C. B. D.

PROP. VII. TEOR.

§. 173. *L'integrale del fratto* $\frac{dx}{(1+x^2)^r}$ *adegua la seguente espressione*

$$\frac{1.3.5....2r-3}{2.4.6....2r-2}\left\{\begin{array}{l}\text{Arc.tang.}x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{2.4}{3.5}\frac{x}{(1+x^2)^3}\\ +....+\frac{2.4.6....2r-4}{3.5.7....2r-3}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{r-1}}\end{array}\right\}+C,$$

nella quale l'arco, che ha per tangente la variabile x, *è preso nel cerchio, che ha per raggio l'unità.*

Dim. E poichè pel §. 170 l'integrale di $\frac{dx}{1+x^2}$ pareggia Arc. tang. x, e ponendo 2 per r nell'equazione (2) del §. prec. si ha

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2},$$

dev'essere pure

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\text{Arc.tang.}x+\frac{x}{1+x^2}\right)\ldots\ldots(1)$$

Ma ponendo 3 in luogo di r in ciascun membro dell'equazione ((2)§.172), si ha

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Dunque se in quest'ultima equazione si sostituisca il valore di $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ ottenuto nell'equazione (1), dee risultarne

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1.3}{2.4}\left(\text{Arc.tang.}x+\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2},$$

o sia

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1.3}{2.4}\left(\text{Arc.tan.}x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{3}\,\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)\ldots(2).$$

Ma ponendo 4 in luogo di r nell'equazione (2) del Teorema precedente, si ha

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Dunque se in quest' ultima equazione si ponga il valore di $\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ tratto dall'equazione (2), si ottiene

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\text{Arc.tan.}x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{3}\,\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)$$
$$+\frac{1}{6}\,\frac{x}{1+x^2)^3},$$

o sia

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}=$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\text{Arc. tan.}x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{3}\,\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3}\right).$$

Nello stesso modo si dovrà procedere per gli altri casi. C. B. D.

§. 173. *Cor.* E poichè il fratto $\frac{adx}{(m+nx^2)^r}$ pareggia il prodotto di $\frac{a}{m^r}$ per $\frac{dx}{\left(1+\frac{nx^2}{m}\right)^r}$, o quello di

$\frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}}{m^r}$ per $\frac{dx\sqrt{\frac{n}{m}}}{\left(1+\frac{nx^2}{m}\right)^r}$; dev'essere l'integrale di quel fratto uguale a quello di quest' ultimo prodotto. Ma

l'integrale di quest'ultimo prodotto pareggia $\frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}}{m^r}$ multiplicato per ciò che ne diviene l'integrale di $\frac{dx}{(1+x^2)^r}$ (§.173) ponendovi $x\sqrt{\frac{n}{m}}$ in luogo di x.

Dunque il fratto $\frac{adx}{(m+nx^2)^r}$ è integrabile pel Teorema precedente.

PROP. VIII. TEOR.

§. 175. *Se* m *sia un numero maggiore di* 1, *ed* r *un numero intiero; il fratto* $\frac{(A+Bx)dx}{(x^2-2ax+ma^2)^r}$ *si renderá integrabile, se pongasi la nuova variabile* v *uguale ad* $\frac{x-a}{a\sqrt{m-1}}$.

Dim. Essendo $v=\frac{x-a}{a\sqrt{m-1}}$, liberando dal fratto questa equazione, si avrà $av\sqrt{m-1}=x-a$, ed elevando a quadrato l'uno e l'altro membro, dovrà risultarne $a^2mv^2-a^2v^2=x^2-2ax+a^2$,

ed $a^2mv^2-a^2v^2-a^2=x^2-2ax$,

ad aggiungendo ma^2 ad ambi i membri, dovrà emergerne

$$a^2mv^2-a^2v^2-a^2+ma^2=x^2-2ax+ma^2,$$

cioè $(a^2m-a^2)(1+v^2)=x^2-2ax+ma^2$

ed $(a^2m-a^2)^r(1+v^2)^r=(x^2-2ax+ma^2)^r$.

Ma dall' equazione $av\sqrt{m-1}=x-a$ si ha

$$adv\sqrt{m-1}=dx, \text{ ed } av\sqrt{m-1}+a=x.$$

Dunque se nel fratto $\frac{(A+Bx)dx}{(x^2-2ax+ma^2)^r}$, si sostituiscano i valori di x, dx, e di $(x^2-2ax+ma^2)^r$, ne dovrà risultare

$$\frac{(A+Bx)dx}{(x^2-2ax+ma^2)^r}=\frac{(A+Bav\sqrt{m-1}+Ba)adv\sqrt{m-1}}{(a^2m-a^2)^r(1+v^2)^r}$$

$$=\frac{Aa\sqrt{m-1}+Ba^2\sqrt{m-1}}{(a^2m-a^2)^r}\cdot\frac{dv}{(1+v^2)^r}+\frac{Ba^2(m-1)}{a^{2r}(m-1)^r}\times\frac{vdv}{(1+v^2)^r}$$

o sia

$$\frac{(A+Bx)dx}{(x^2-2ax+ma^2)^r}=\frac{A+Ba}{a^{2r-1}(m-1)^{\frac{2r-1}{2}}}\cdot\frac{dv}{(1+v^2)^r}$$

$$-\frac{B}{a^{2r-2}(m-1)^{r-1}(2r-2)}\cdot\frac{(-2r+2)vdv}{(1+v^2)^r},$$

quando r è maggiore di 1. Che se r sia uguale ad 1 si avrà

$$\frac{(A+Bx)dx}{x^2-2ax+ma^2}=\frac{A+Ba}{a(m-1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dv}{1+v^2}+\frac{B}{2}\cdot\frac{2vdv}{1+v^2}.$$

Ma nel primo caso il fratto $\frac{dv}{(1+v^2)^r}$ si può integrare pel §. 173, e l'altro $\frac{(-2r+2)vdv}{(1+v^2)^r}$ ha per integrale $\frac{1}{(1+v^2)^{r-1}}$, come si rileva dal §. 165: e nel secondo caso l'integrale di $\frac{dv}{1+v^2}$ pareggia Arc. tang. v, e quello di $\frac{2vdv}{1+v^2}$ (§. 165) adegua $L(1+v^2)$. Dunque la proposta formola è sempre integrabile. C. B. D.

Esempio. Vogliasi integrare il fratto $\frac{(2-3x)dx}{(x^2-2x+5)^2}$.

Quì il trinomio $x^2-2ax+ma^2$ n' è dinotato da x^2-2x+5, ed r da 2. Dunque dev' essere $2a=2$, ed $a=1$: $ma^2=m.1^2=5$, ed $m=5$. Il perchè dev' essere $m-1=4$, e $\sqrt{m-1}=\sqrt{4}=2$. E quindi dovendo farsi $v=\frac{x-a}{a\sqrt{m-1}}$; dovrà essere nel caso presente $v=\frac{x-1}{2}$. Dunque dev' essere $2v=x-1$, $4v^2=x^2-2x+1$, $4v^2+4=x^2-2x+5$, $(4v^2+4)^2=16(1+v^2)^2=(x^2-2x+5)^2$, $2v+1=x$, e $2dv=dx$. E quindi si ottiene

$$\frac{(2-3x)dx}{(x^2-2x+5)^2}=\frac{(-6v-1)2dv}{16(1+v^2)^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{dv}{(1+v^2)^2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{2vdv}{(1+v^2)^2}$$

e

$$\int\frac{(2-3x)dx}{(x^2-2x+5)^2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\text{Arc.tang.}v+\frac{v}{1+v^2}\right)$$
$$+\frac{3}{8}\times\frac{1}{1+v^2}+C,$$

e ponendo $\frac{x-1}{2}$ in luogo di v, si ha

$$\int\frac{(2-3x)dx}{(x^2-2x+5)^2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\text{Arc. tang.}\frac{x-1}{2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\right)$$
$$+\frac{3}{2(x^2-2x+5)}+C.$$

§. 176. *Cor.* Se il fratto genuino $\frac{M}{N}$ si risolva nelle sue parziali; ciascuna di queste dovrà avere (§§. 81, 82, 83, 84, 85) una delle seguenti forme $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{A+Bx}{x^2-2ax+ma^2}$, ed $\frac{A+Bx}{(x^2-2ax+ma^2)^n}$. Il perchè il fratto $\frac{Mdx}{N}$ sarà uguale alla somma di fra-

zioni, ciascuna delle quali avrà una delle seguenti forme $\frac{Adx}{x-q}$, $\frac{Adx}{(x-a)^n}$, $\frac{(A+Bx)dx}{x^2-2ax+ma^2}$, $\frac{(A+Bx)dx}{(x^2-2ax+ma^2)^n}$

Ma ciascuno di tali fratti è integrabile per le cose finora esposte. Dunque dev' essere integrabile il fratto genuino $\frac{Mdx}{N}$.

CAP. IV.

DELLE INTEGRAZIONI DI TALUNE FUNZIONI IRRAZIONALI.

PROP. IX. TEOR.

§. 177. *Se il numero* m *sia divisibile per l'altro* n, *l'espressione* $Ax^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ *si renderà integrabile ponendo* $a+bx^n=u^q$.

Dim. Essendo $a+bx^n=u^q$ . . . (1);

dev' essere $$x^n=\frac{u^q-a}{b} \quad . . . (2).$$

E quindi elevando ambi i membri dell'equazione (1) alla potenza $\frac{p}{q}$, ed alla potenza $\frac{m}{n}$ quelli dell' equazione (2), si avrà

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=u^p \quad . . . (3),$$

ed $$x^m=\frac{\left(u^q-a\right)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$$

E prendendo i differenziali dell'uno e dell'altro mem-

bro di quest' ultima equazione, ne dovrà risultare

$$mx^{m-1}dx=\frac{mqu^{q-1}du}{nb^{\frac{m}{n}}}\left(u^q-a\right)^{\frac{m}{n}-1} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Il perchè se moltiplicansi tra loro i primi membri dell' equazioni (4) e (3), ed i secondi tra loro, e poi ciascuno dei due prodotti, che si otteugono, si multiplichi per $\frac{A}{m}$, si avrà

$$Ax^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{Aqu^{p+q-1}du}{nb^{\frac{m}{n}}}\left(u^q-a\right)^{\frac{m}{n}-1}$$

Ma per le precedenti verità è integrabile il secondo membro di quest' ultima equazione, quando $\frac{m}{n}$ è un numero intiero. Dunque la proposta formola coll' indicata sostituzione è integrabile, qualora il numero m è divisibile per l' altro n. C. B. D.

§. 178. *Cor.* Dall' ultima equazione del §. precedente si rileva, che qualora $\frac{m}{n}$ l' è un numero intiero, l' espressione $Ax^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si possa sempre integrare, qualunque sieno i segni degli esponenti m, n e $\frac{p}{q}$.

Esempio. Vogliasi l' integrale dell' espressione $5x^2dx(2-4x^3)^{\frac{1}{2}}$.

Qui l' è $m-1=2$, $n=3$, $p=1$, e $q=2$. Dunque essendo $\frac{m}{n}$ uguale al numero intiero 1; dee farsi

$$2-4x^3=u^2.$$

E quindi si ha $x^3=\frac{2-u^2}{4}$, $3x^2dx=-\frac{udu}{2}$, e $(2-4x^3)^{\frac{1}{2}}$

$=u^{\frac{2}{3}}=u$. Il perchè dev' essere

$$5x^2dx(2-4x^3)^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{u^2du}{2},$$

e $$\int.5x^2dx(2-4x^3)^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{6}\int u^2du=-\frac{5}{18}u^3+C.$$

Ma l'è $u^3=(2-4x^3)^{\frac{3}{2}}$. Dunque dev' essere

$$\int 5x^2dx(2-4x^3)^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{18}(2-4x^3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

PROP. X. TEOR.

§. 179. *Se l'aggregato delle frazioni* $\frac{m}{n}$, e $\frac{p}{q}$ *faccia un numero intiero; l' espressione* $Ax^{m-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ *si renderà integrabile ponendo* $a+bx^n=x^nz^q$.

Dim. E poichè l'è $a+bx^n=x^nz^q$ . . . (1),

dev' essere $$x^n=\frac{a}{zq-b}\ .\ .\ .\ (2),$$

ed $$x^m=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}}}\ .\ .\ .\ (3)$$

Or se il valore di x^n dell' equazione (2) si ponga nel secondo membro dell' equazione (1), e si differenziino ambi i membri dell' equazione (3); ne debbono risultare le seguenti equazioni; cioè

$$a+bx^n=\frac{azq}{zq-b}\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

e $$mx^{m-1}dx = -\frac{mq}{n} \cdot \frac{a^{\frac{m}{n}} z^{q-1} dz}{(z^q - b)^{\frac{m}{n}+1}} \quad \ldots (5),$$

Ma dall' equazione (4) si ha

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}} z^p}{\left(z^q - b\right)^{\frac{p}{q}}} \quad \ldots . (6)$$

e multiplicando tra loro i primi membri dell'equazioni (5) e (6), ed i secondi tra loro, si ottiene

$$mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{-mqa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n} \cdot \frac{z^{p+q-1}dz}{(zq-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}.$$

Dunque dev' essére

$$Ax^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = -\frac{Aqa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n} \cdot \frac{z^{p+q-1}dz}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}$$

Ma il secondo membro di quest' ultima equazione è integrabile (§. 176); dunque dev' esserlo anche il primo. C. B. D.

§. 180. *Cor.* Dunque qualunque sieno i segni degli esponenti m, n, e $\frac{p}{q}$, l' espressione $Ax^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ si potrà sempre integrare, purchè $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ sia un numero intiero.

Esempio. Trasformare la formola $4x^2dx(2+3x^2)^{\frac{1}{2}}$ *in un'altra integrabile per le verità precedenti.*

Essendo nella data formola differenziale $m-1=2$,

$n=2$, $p=1$, e $q=2$, sarà $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$. Il perchè essa si trasformerà in un'altra integrabile ponendo

$$2+3x^2=x^2z^2.$$

Ma da questa equazione si ha $x^2=\frac{2}{z^2-3}$, $x^2z^2=\frac{2z^2}{z^2-3}$, e quindi $2+3x^2=x^2z^2=\frac{2z^2}{z^2-3}$. Dunque dev' essere

$$(2+3x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{z\sqrt{2}}{(z^2-3)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (1)$$

In oltre, essendo $x^2=\frac{2}{z^2-3}$; sarà elevando ciascun membro alla potenza $\frac{3}{2}$, e differenziando

$$3x^2dx=\frac{-2^{\frac{3}{2}}.3zdz}{(z^2-3)^{\frac{5}{2}}},$$

e

$$4x^2dx=\frac{-8zdz\sqrt{2}}{(z^2-3)^{\frac{5}{2}}} \quad \ldots (2)$$

E multiplicando il primo membro pel primo membro, e 'l secondo pel secondo delle due equazioni (1) e (2), la proposta formola $4x^2dx(2+3x^2)^{\frac{1}{2}}$ si vedrà ridotta alla seguente $\frac{-16z^2dz}{(z^2-3)^3}$, ch' è integrabile pel §. 176.

PROP. XI. TEOR.

§. 181. *Supposto che* X *ne dinoti una qualunque funzione algebrica razionale della variabile* x; *la formola* $Xdx\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ *sarà sempre integrabile.*

Dim. Cas. I. Suppongasi in primo luogo, che il trinomio ax^2+bx+c sia risolvibile ne' fattori reali

$ax+m$, ed $x+n$, e si ponga

$$(ax+m)(x+n)=(ax+m)^2z^2 \ldots (1).$$

Sarà, dividendo per $ax+m$ l'uno e l'altro membro di questa equazione,

$$x+n=axz^2+mz^2$$

ed $$x=\frac{n-mz^2}{az^2-1} \ldots (2).$$

Il perchè se nel secondo membrò dell'equazione (1) si sostituisca il valore di x ottenuto in quest'ultima equazione, si avrà

$$(ax+m)(x+n)=\left(\frac{an-amz^2}{az^2-1}+m\right)^2 z^2,$$

o sia $$(ax+m)(x+n)=\left(\frac{an-m}{az^2-1}\right)^2 z^2;$$

e quindi $$\sqrt{((ax+m)(x+n))}=\sqrt{(ax^2+bx+c)}=\frac{anz-mz}{az^2-1} \ldots (3)$$

Ma differenziando ambi i membri dell'equazione (2) si ha $$dx=\frac{2mzdz-2anzdz}{(az^2-1)^2} \ldots (4)$$

e ponendo in X il fratto $\frac{n-mz^2}{az^2-1}$ in luogo di x (Equaz. (2)) si ottiene una funzione algebrica razionale della variabile z. Dunque nel caso che i fattori del trinomio ax^2+bx+c sieno reali, coll'indicata sostituzione la proposta formola si riduce ad un'espressione differenziale algebrica razionale della z, la quale si potrà integrare per le verità precedenti.

Cas. II. Che se poi sieno immaginarii i fattori del trinomio ax^2+bx+c, si ponga un tal trinomio uguale al quadrato di $x\sqrt{a}+z\sqrt{c}$; cioè si ponga

$$ax^2+bx+c=ax^2+2zx\sqrt{ac}+cz^2.$$

Dovrà essere

$$bx+c=2zx\sqrt{ac}+cz^2\,,$$

ed
$$x=\frac{cz^2-c}{b-2z\sqrt{ac}}\quad\ldots\ (1)$$

E quindi ne dovrà risultare

$$ax^2+bx+c=\left(\frac{cz^2\sqrt{a}-c\sqrt{a}}{b-2z\sqrt{ac}}+z\sqrt{c}\right)^2;$$

cioè
$$\sqrt{(ax^2+bx+c)}=\frac{-cz^2\sqrt{a}+bz\sqrt{c}-c\sqrt{a}}{b-2z\sqrt{ac}}.$$

Ma differenziando ambi i membri dell'equazione (1) si ha

$$dx=\frac{2bczdz-2cz^2dz\sqrt{ac}-2cdz\sqrt{ac}}{(b-2z\sqrt{ac})^2},$$

e ponendo $\frac{cz^2-c}{b-2z\sqrt{ac}}$ in luogo di x in X, questa si trasforma in una funzione algebrica razionale di z. Dunque nel caso che i fattori del trinomio ax^2+bx+c sieno immaginarii, la proposta formola coll' indicata sostituzione si trasforma in una funzione differenziale algebrica razionale di z, la quale si potrà perciò integrare per mezzo delle verità finora esposte. C.B.D.

§. 182. *Cor.* Con una delle due sostituzioni indicate ne' due casi della Prop. prec. si potrà trasformare in una formola integrabile l'espressione

$\frac{Xdx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$, purchè sia X una funzione algebrica razionale di x.

Esempio. Trasformare l' espressione

$$\frac{dx\sqrt{(3x^2+2x+9)}}{x^2}$$

in una formola integrabile.

Essendo immaginarii i fattori del trinomio $3x^2+2x+9$,

la proposta formola si trasformerà in un'altra integrabile per mezzo del Cas. II della Prop. prec. Ond'essendo $a=3$, $c=9$, e quindi $\sqrt{c}=3$; dee farsi

$$3x^2+2x+9=(x\sqrt{3}+3z)^2$$

cioè
$$3x^2+2x+9=3x^2+6zx\sqrt{3}+9z^2$$

Il perchè dev'essere

$$2x+9=6zx\sqrt{3}+9z^2,$$

ed
$$x=\frac{9-9z^2}{6z\sqrt{3}-2}.$$

Dunque dev'essere pure

$$\sqrt{(3x^2+2x+9)}=\left(\frac{9\sqrt{3}-9z^2\sqrt{3}}{6z\sqrt{3}-2}+3z\right)=\frac{9\sqrt{3}+9z^2\sqrt{3}-6z}{6z\sqrt{3}-2}$$

$$\frac{1}{x^2}=\frac{(6z\sqrt{3}-2)^2}{(9-9z^2)^2},$$

e
$$dx=\frac{-54z^2dz\sqrt{3}+36zdz-54dz\sqrt{3}}{(6z\sqrt{3}-2)^2}$$

E quindi dev'essere il prodotto de' primi membri di queste tre ultime equazioni uguale a quello de' secondi; cioè

$$\frac{dx\sqrt{(3x^2+2x+9)}}{x^2}=$$

$$\frac{(9\sqrt{3}+9z^2\sqrt{3}-6z)(6z\sqrt{3}-2)^2(-54z^2dz\sqrt{3}+36zdz-54dz\sqrt{3})}{(6z\sqrt{3}-2)^3(9-9z^2)^2}$$

o sia

$$\frac{dx\sqrt{(3x^2+2x+9)}}{x^2}=\frac{(9\sqrt{3}+9z^2\sqrt{3}-6z)(-54z^2dz\sqrt{3}+36zdz-54dz\sqrt{}}{2\cdot 9^2(1-z)^2(3z\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3}+3z^2\sqrt{3}-2z)(-3z^2dz\sqrt{3}+2zdz-3dz\sqrt{3})}{3(1-z^2)^2(3z\sqrt{3}-1)}$$

Ma il secondo membro di quest' ultima equazione è integrabile (§. 176); dunque dev'essere integrabile benanche il primo.

PROP. XII. TEOR.

§. 183. *Se* X *ne dinoti una qualunque funzione algebrica razionale di* x *; la formola*

$X dx \left(\frac{a+bx}{m+nx}\right)^{\frac{p}{q}}$ *si renderà integrabile se in luogo di* $\frac{a+bx}{m+nx}$ *si ponga la nuova variabile* u *elevata alla potenza* q.

Dim. Essendo $u^q = \frac{a+bx}{m+nx}$ . . . (1),

sarà la potenza $\frac{p}{q}$ del primo membro uguale alla potenza $\frac{p}{q}$ del secondo membro; cioè

$$u^p = \left(\frac{a+bx}{m+nx}\right)^{\frac{p}{q}} \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Ma dall' equazione (1) si ha

$$x = \frac{a-mu^q}{nu^q-b} \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

e quindi $$dx = (bmq-anq) . \frac{u^{q-1}\,du}{(nu^q-b)^2} \quad . \; . \; (4),$$

ed è poi una funzione algebrica razionale di u quell' espressione, che si ottiene ponendo in X il secondo membro dell' equazione (3) in luogo di x. Dunque se questa funzione di u si multiplichi pel prodotto dei secondi membri dell' equazioni (2) e (4), si avrà per prodotto una funzione razionale di u multiplicata per du, la quale sarà uguale alla proposta

formola $Xdx\left(\frac{a+bx}{m+nx}\right)^{\frac{p}{q}}$. Ma la prima di queste due espressioni è integrabile per le verità precedenti. Dunque dev'essere integrabile benanche la seconda, ch'è la proposta. C. B. D.

PROP. XIII. TEOR.

§. 184. *Supposto che* $\frac{m}{n}$ *sia un numero intiero; la formola* $x^{m-1}dx\left(\frac{a+bx^n}{p+qx^n}\right)^{\frac{r}{t}}$ *si trasformerà in un' altra, che sarà integrabile, se in essa si ponga la nuova variabile* z *elevata alla potenza* t *in luogo di* $\frac{a+bx^n}{p+qx^n}$.

Dim. Essendo $\frac{a+bx^n}{p+qx^n}=z^t \ldots (1)$,

sarà, elevando ciascun membro alla potenza $\frac{r}{t}$,

$$\left(\frac{a+bx^n}{p+qx^n}\right)^{\frac{r}{t}}=z^r \ldots (2)$$

Ma dall' equazione (1) si ha

$$x^n=\frac{a-pz^t}{qz^t-b},$$

e quindi $$x^m=\left(\frac{a-pz^t}{qz^t-b}\right)^{\frac{m}{n}},$$

ed $$mx^{m-1}dx=\frac{m}{n}\left(\frac{a-pz^t}{qz^t-b}\right)^{\frac{m}{n}-1}.\frac{(ptb-qta)z^{t-1}dz}{(qz^t-b)^2} \ldots (3)$$

Dunque dev' essere il prodotto de' primi membri dell' equazioni (2) e (3) uguale a quello dei secondi: e 'l primo prodotto diviso per m uguale al secondo diviso per m; cioè

$$x^{m-1}dx\left(\frac{a+bx^n}{p+qx^n}\right)^{\frac{r}{t}}=\frac{ptb-qta}{n}\left(\frac{a-pz^t}{qz^t-b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\frac{z^{t+r-1}dz}{(qz^t-b)^2}.$$

Ma per esserne $\frac{m}{n}$ un numero intiero è integrabile il secondo membro di quest' ultima equazione. Dunque dev' essere integrabile benanche il primo. C.B.D.

§. 185. *Scol.* Oltre alle formole differenziali algebriche ed irrazionali, che si riducono a quelle, le quali in questo Capo si son trasformate in altre di integrabil forma, si riducono benanche a razionali le seguenti due frazioni

$$\frac{dx(a+bx)^{\frac{m}{t}}}{x+(a+bx)^{\frac{n}{t}}+(a+bx)^{\frac{r}{t}}},\ \text{e}\ \frac{z^{\frac{s}{\lambda}q-1}dz}{e+fz^q+gz^{2q}}$$

se nella prima di esse pongasi u^t in luogo di $a+bx$, ed y^λ in luogo di z nella seconda.

CAP. V.

DELLE INTEGRAZIONI DI ALCUNE FORMOLE, CHE CONTENGONO QUANTITA' CIRCOLARI.

PROP. XIV. TEOR.

§. 186. *Posto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1; *l' integrale del fratto* $\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}$ *pareggia* $\frac{1}{2}L\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$, *e quello dell' altro fratto* $\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$ *adegua* $\frac{1}{2}L\left(\frac{1+\text{sen}\alpha}{1-\text{sen}\alpha}\right)$.

Dim. Par. I. Si multiplichi per $\text{sen}\alpha$ tanto il numeratore, che il denominatore del fratto $\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}$. Dovrà risultarne

$$\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{d\alpha\,\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha}, \text{ ovvero } \frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{d\alpha\,\text{sen}\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

Ma ponendo $\cos\alpha=x$, si ha $\cos^2\alpha=x^2$, e $d\alpha\,\text{sen}\alpha=-dx$. Dunque dev' essere

$$\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{-dx}{1-x^2},$$

e risolvendo in parziali il fratto, ch' è nel secondo membro di quest' ultima equazione, si ha

$$\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=-\frac{dx}{2(1+x)}-\frac{dx}{2(1-x)}.$$

Il perchè dev' essere

$$\int\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=-\frac{1}{2}\,\text{L}(1+x)+\frac{1}{2}\,\text{L}(1-x),$$

cioè

$$\int\frac{d\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{1}{2}\,\text{L}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\,\text{L}\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right).$$

Par. II. In oltre, si multiplichi per $\cos\alpha$ tanto il numeratore, che il denominatore del fratto $\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$. Si avrà

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{d\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{d\alpha\cos\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha}.$$

Ma ponendo $\text{sen}\alpha=x$, si ha $\text{sen}^2\alpha=x^2$, e $d\alpha\cos.\alpha=dx$. Dunque dev' essere

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{dx}{1-x^2}.$$

E risolvendo in parziali il fratto, ch'è nel secondo membro di quest' ultima equazione, si ha

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{dx}{2(1+x)}+\frac{dx}{2(1-x)}.$$

Il perchè dev' essere

$$\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\,L\,(1+x)-\frac{1}{2}\,L(1-x)\,,$$

cioè $\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\,L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\,L\left(\frac{1+\text{sen}\alpha}{1-\text{sen}\alpha}\right)$..C.B.D.

PROP. XV. TEOR.

§. 187. *Posto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1 *; ciascuno de' fratti*

$$\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\overline{\cos\alpha}^{n}}\,,\ e\ \frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}\alpha}^{m}\,\overline{\cos\alpha}^{n}}$$

si trasforma in un' espressione integrabile , se pongasi $1-\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2x^2$.

Dim. Essendo $1-\cos.^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2x^2$, dividendo per $1+\cos\alpha$ si ha $1-\cos\alpha=x^2+x^2\cos\alpha$; e quindi

$$-\cos\alpha=\frac{x^2-1}{1+x^2}\ .\ .\ .\ .\ (1),$$

e differenziando ambi i membri di quest' ultima equazione, ne risulta

$$d\alpha\,\text{sen}\alpha=\frac{4xdx}{(1+x^2)^2}\ .\ .\ .\ (2).$$

Ma dall' equazione (1) si ha

$$\overline{\cos.\alpha}^{n}=\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n,\ 1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\,;$$

e quindi $\text{sen}\alpha=\frac{2x}{1+x^2}$, e $\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1}=\frac{(2x)^{m-1}}{(1+x^2)^{m-1}}$.

Dunque , sostituendo , dev' essere

$$\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}_\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos.\alpha}^{\,n}}=\frac{4xdx}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{(2x)^{m-1}}{(1+x^2)^{m-1}}:\frac{(1-x^2)^n}{(1+x^2)^n},$$

e $$\frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}_\alpha}^{\,m}\,\overline{\cos_\alpha}^{\,n}}=\frac{4xdx}{(1+x^2)^2}:\frac{(2x)^{m+1}}{(1+x^2)^{m+1}}\cdot\frac{(1-x^2)^n}{(1+x^2)^n},$$

cioè

$$\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}_\alpha}^{\,m}}{\overline{\cos_\alpha}^{\,n}}=\frac{4x(2x)^{m+1}dx}{(1+x^2)^{m-n+1}(1-x^2)^n},$$

e $$\frac{d\alpha}{\overline{\text{sen}_\alpha}^{\,m}\,\overline{\cos_\alpha}^{\,n}}=\frac{4x(1+x^2)^{m+n-1}dx}{(2x)^{m+1}(1-x^2)^n}.$$

Ma gl'integrali de'secondi membri di queste due ultime equazioni si possono facilmente ottenere (§.176) Dunque se in tali integrali in luogo di x si ponga $\sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos_\alpha}\right)}$, si otterranno gl' integrali delle date espressioni. C. B. D.

PROP. XVI. TEOR.

§. 188. *L'espressione* $Ad\varphi\text{sen}\varphi(a+b\cos\varphi)^n$ *si riduce in una formola integrabile, se pongasi* x *in luogo di* cos.φ.

Dim. In fatti, ponendo $\cos\varphi=x$, si ha $d\varphi\text{sen}\varphi=-dx$, $a+b\cos\varphi=a+bx$, ed $(a+b\cos\varphi)^n=(a+bx)^n$. Il perchè l' espressione $Ad\varphi\text{sen}\varphi(a+b\cos\varphi)^n$ si trasforma in $-Adx(a+bx)^n$, ch'è sempre integrabile qualunque sia il numero n (§. 167.) C. B. D.

§. 189. *Cor.* I. Sia $a=0$, e $b=1$. Dovrà essere $Ad\varphi\text{sen}\varphi(a+b\cos\varphi)^n=Ad\varphi\text{sen}\varphi\overline{\cos\varphi}^n$, qualunque sia il numero n, e ponendo x in luogo di $\cos\varphi$, si avrà $Ad\varphi\text{sen}\varphi\overline{\cos\varphi}^n=-Ax^ndx$, il cui integrale, nel caso di n diverso da -1, pareggia $-\frac{Ax^{n+1}}{n+1}$, e quando n è

uguale a -1, lo stesso integrale adegua $-AL.x$. Dunque ponendo in ciascuno di questi integrali $\cos\varphi$ per x, si ha

$$\int A d\varphi \operatorname{sen}\varphi \overline{\cos\varphi}^{n} = -\frac{A\overline{\cos\varphi}^{n+1}}{n+1} + C,$$

quando n è diverso da -1: e quando n pareggia -1, si ha

$$\int \frac{A d\varphi \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = -A\,L.\cos\varphi + C.$$

§. 190. *Cor.* II. Sia l'arco φ uguale a $90^{o}-\alpha$; dev'essere $d\varphi = -d\alpha$, $\operatorname{sen}\varphi = \cos\alpha$, e $\overline{\cos\varphi}^{n} = \overline{\operatorname{sen}\alpha}^{n}$. E quindi la formola $A d\alpha \cos\alpha \overline{\operatorname{sen}\alpha}^{n}$ si trasforma nell'altra $-A d\varphi \operatorname{sen}\varphi \overline{\cos\varphi}^{n}$; il cui integrale nel caso di n diverso da -1 (§. 188), pareggia $\frac{A\overline{\cos\varphi}^{n+1}}{n+1} + C$; e nel caso di n uguale a -1, lo stesso integrale adegua $AL.\cos\varphi + C$. Dunque ponendo in questi due integrali $\operatorname{sen}\alpha$ in luogo di $\cos\varphi$, dev'essere

$$\int A d\alpha \cos\alpha \overline{\operatorname{sen}\alpha}^{n} = \frac{A\overline{\operatorname{sen}\alpha}^{n+1}}{n+1} + C,$$

e

$$\int \frac{A d\alpha \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = AL.\operatorname{sen}\alpha + C.$$

§. 191. *Cor.* III. Essendo $\int \frac{A d\alpha \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = AL.\operatorname{sen}\alpha$, e $\int \frac{A d\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -AL.\cos\alpha$; dev'essere

$$\int \frac{A d\alpha \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \int \frac{A d\alpha \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$\int \frac{A d\alpha \cos^{2}\alpha + A d\alpha \operatorname{sen}^{2}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha} = AL.\operatorname{sen}\alpha - AL.\cos\alpha,$$

cioè

$$\int \frac{A d\alpha}{\text{sen}\alpha \cos\alpha} = A L.\text{tang}.\alpha + C.$$

PROP. XVII. TEOR.

§. 192. *Posto il raggio trigonometrico uguale ad* 1, *la formola* $\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$ *si trasforma in un fratto algebrico razionale, e quindi si puó integrare, se pongasi* $\text{sen}^2\varphi=(1+\cos\varphi)^2x^2$.

Dim. E poichè $\text{sen}^2\varphi$ pareggia $1-\cos^2\varphi$, ed $1-\cos^2\varphi$ adegua $(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)$; dev' essere pure

$$(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)=(1+\cos\varphi)^2x^2,$$

ed

$$1-\cos\varphi=x^2+x^2\cos\varphi.$$

Il perchè dev' essere

$$\cos\varphi=\frac{1-x^2}{1+x^2} \quad . \; . \; . \; (1),$$

e

$$-d\varphi\,\text{sen}\varphi=\frac{-4xdx}{(1+x^2)^2} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Ma per esserne $\cos\varphi=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, l'è pure

$$\text{sen}\varphi=\sqrt{\left(1-\frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}\right)}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Dunque dev' essere

$$-\frac{2xd\varphi}{1+x^2}=-\frac{4xdx}{(1+x^2)^2}, \text{ e } d\varphi=\frac{2dx}{1+x^2}$$

E quindi ponendo nella proposta formola i valori di $d\varphi$ e $\cos\varphi$ poc' anzi ottenuti, si ha

$$\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}=-\frac{\frac{2dx}{1+x^2}}{a+\frac{b-bx^2}{1+x^2}}=\frac{2dx}{a+ax^2+b-bx^2},$$

ch'è una funzione razionale, e perciò integrabile. C. B. D.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 193. *Posto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1 ; *la formola* $\frac{(c+e\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$ *trasformasi in un' altra integrabile, se pongasi*

$$1-\cos^2\varphi=(1-\cos\varphi)^2x^2.$$

Dim. E poichè $1-\cos^2\varphi$ pareggia $(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)$; dev' essere pure

$$(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)=(1-\cos\varphi)^2x^2,$$

ed

$$1+\cos\varphi=x^2-x^2\cos\varphi.$$

Il perchè dev' essere

$$\cos\varphi=\frac{x^2-1}{x^2+1}\ \ldots\ (1),$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\left(1-\frac{x^4-2x^2+1}{x^4+2x^2+1}\right)}=\frac{2x}{x^2+1}\ \ldots\ (2)$$

Ma dall' equazione (1) si ha

$$-d\varphi\operatorname{sen}\varphi=\frac{4xdx}{(x^2+1)^2}\ \ldots\ (3),$$

e dividendo il primo membro di quest' ultima equazione pel primo membro dell' equazione (2), e 'l secondo pel secondo, e multiplicando per -1 ciascuno de' quozienti, si ottiene

$$d\varphi = \frac{-2dx}{x^2+1} \quad . \; . \; . \; . \; (4).$$

Dunque se nella proposta formola si sostituiscano i valori di $\cos\varphi$ e $d\varphi$ ottenuti nell' equazioni (1), e (4), si avrà

$$\frac{(c+e\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = -\frac{\left(c+\frac{ex^2-e}{x^2+1}\right)\frac{2dx}{x^2+1}}{\left(a+\frac{bx^2-b}{x^2+1}\right)^n} =$$

$$-\frac{(c(x^2-1)^{n-1}+(ex^2-e)(x^2+1)^{n-2})2dx}{(ax^2+a+bx^2-b)^n}$$

Ma il secondo membro di quest' ultima equazione è integrabile pe' §§. 169 e 176. Dunque dev' essere integrabile benanche il primo. C. B. D.

C A P. VI.

DELL' INTEGRAZIONE PER PARTI.

PROP. XIX. TEOR.

§. 194. *L' integrale del prodotto di una funzione* X *di una variabile* x *pel differenziale di un' altra funzione* Y *della stessa variabile pareggia il prodotto di dette funzioni, diminuito dell' integrale del prodotto, che si ottiene multiplicando la seconda funzione pel differenziale della prima. Cioè dev' essere*

$$\int.XdY = XY - \int.YdX.$$

Dim. In fatti essendo (§. 110.)

$$D.XY = XdY + YdX,$$

dev' essere pure

$$XdY = D.XY - YdX;$$

e quindi $\int.XdY = XY - \int.YdX$. . . . . C. B. D.

§. 195. *Cor.* Dunque se una formola differenziale XdY, che non possa integrarsi per le verità precedenti, si risolva in due fattori X e dY, dei quali il primo X sia una funzione di una quantità variabile, e l'altro dY sia un esatto differenziale di un'altra funzione della medesima variabile; l'integrabilità di quella formola differenziale dipenderà da quella del prodotto della seconda funzione Y pel differenziale dX della prima. Il perchè se un tal prodotto sia integrabile, o si risolva in due fattori X' e dY', che abbiano le condizioni di quelli, ne'quali si è risoluta la formola proposta, e così si proceda in seguito, fino a che si pervenga ad una formola, ch'è integrabile per le verità precedenti, o che per integrarsi dee svolgersi in serie, la quale vuol essere convergente, si perverrà finalmente ad ottenere l'integrale della proposta formola, che in tal caso si dirà *integrata per parti.*

PROP. XX. TEOR.

§. 196. *Posto che* n *ne dinoti un qualunque numero diverso da* -1; *l'integrale di* $x^n dx L.x$ *pareggia* $\frac{x^{n+1}Lx}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$. *Che se* n *sia uguale a* -1; *l'integrale di* $\frac{dx}{x}Lx$ *adegua* $\frac{\overline{L.x}^2}{2} + C$.

Dim. Cas. I. E poichè $\int . x^n dx$ pareggia $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, qualora n è maggiore di 1 (§. 161), ed è $D.Lx = \frac{dx}{x}$; integrando per parti la formola proposta, si avrà

$$\int . x^n dx L.x = \frac{x^{n+1} L.x}{n+1} - \int \frac{x^{n+1} dx}{(n+1)x} .$$

Ma $\int \frac{x^{n+1}dx}{(n+1)x}$ pareggia $\int \frac{x^n dx}{n+1}$, cioè (§.161) $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Dunque dev'essere

$$\int .x^n dx \mathrm{L}.x = \frac{x^{n+1}\mathrm{L}.x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \mathrm{C}.$$

Cas. II. Che se n sia uguale a -1, la proposta formola si riduce a $\frac{dx}{x}\mathrm{L}.x$. Ond'essendo $\int \frac{dx}{x} = \mathrm{L}.x$, sarà

$$\int \frac{dx}{x}\mathrm{L}\,x = \overline{\mathrm{L}.x}^2 - \int \frac{dx}{x}\mathrm{L}.x + \mathrm{C},$$

e trasportando nel primo membro il secondo termine del secondo membro, si avrà

$$2\int \frac{dx}{x}\mathrm{L}.x = \overline{\mathrm{L}x}^2 + \mathrm{C},$$

e dividendo per 2 ciascun membro di quest' ultima equazione, ne dovrà risultare

$$\int . \frac{dx}{x}\mathrm{L}x = \frac{\overline{\mathrm{L}x}^2}{2} + \mathrm{C}'. \quad \text{C. B. D.}$$

PROP. XXI. TEOR.

§. 197. *L' integrale della formola* $\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^n}$ *pareggia l' espressione*

$$-\frac{x^m}{(n-1)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-1}} - \frac{mx^m}{(n-1)(n-2)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}} - \frac{m^2x^m}{(n-1)(n-2)(n-3)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-3}}$$

$$\ldots + \frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1}\int \frac{x^{m-1}dx}{\mathrm{L}.x}.$$

Dim. Poichè la formola $\frac{x^{m-1}dx}{\overline{L.x}^n}$ pareggia $x^m \cdot \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^n}$; integrando per parti quella formola si avrà

$$\int \cdot \frac{x^{m-1}dx}{\overline{L.x}^n} = x^m \int \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^n} - \int\left(\int \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^n}\right) m x^{m-1} dx \ldots (1)$$

Ma ponendo $L.x = y$, il fratto $\frac{dx}{x\,\overline{L.x}^n}$ trasformasi nell' altro $\frac{dy}{y^n}$, il cui integrale adegua (§. 161.) $-\frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$. Dunque dev' essere

$$\int \cdot \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^n} = -\frac{1}{(n-1)\overline{L.x}^{n-1}},$$

e con ciò l' equazione (1) si trasforma nella seguente

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\overline{L.x}^n} = \frac{-x^m}{(n-1)\overline{Lx}^{n-1}} + \frac{m}{(n-1)} \int \frac{x^{m-1}dx}{\overline{Lx}^{n-1}} \ldots (2)$$

In oltre, essendo $\frac{x^{m-1}dx}{\overline{L.x}^{n-1}} = x^m . \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^{n-1}}$; integrando per parti il secondo membro, si avrà

$$\int \cdot \frac{x^{m-1}dx}{\overline{L.x}^{n-1}} = x^m \int \frac{dx}{x\,\overline{Lx}^{n-1}} - m \int\left(\int \frac{dx}{x\,\overline{Lx}^{n-1}}\right) x^{m-1} dx (3)$$

Ma ponendo $L.x = y$, si ha $\int \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^{n-1}} = \int \frac{dy}{y^{n-1}}$

$= -\frac{1}{(n-2)y^{n-2}}$, o sia $\int \frac{dx}{x\,\overline{L.x}^{n-1}} = -\frac{1}{(n-2)\overline{L.x}^{n-2}}$

Dunque se nel secondo membro dell' equazione (3)

si ponga $-\frac{1}{(n-2)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}}$ in luogo di $\int\frac{dx}{x\overline{\mathrm{L}.x}^{n-1}}$, si avrà

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n-1}}=\frac{-x^m}{(n-2)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}}+\frac{m}{(n-2)}\int\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}}.$$

Il perchè se nel secondo membro dell'equazione (2) in luogo di $\int\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n-1}}$ si ponga il secondo membro di quest' ultima equazione, ne dovrà risultare

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n}}=\frac{-x^m}{(n-1)\overline{\mathrm{L}.x}^{n-1}}-\frac{m}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{x^m}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}}$$
$$+\frac{m^2}{(n-1)(n-2)}\int\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n-2}}.$$

E procedendo nello stesso modo si troverà vero quanto si è proposto. C. B. D.

§. 198. *Cor.* Dunque l' integrale della formola $\frac{x^{m-1}dx}{\overline{\mathrm{L}.x}^{n}}$ dipende da quello dell' altra $\frac{x^{m-1}dx}{\mathrm{L}.x}$, ch'è la più semplice di questo genere, ed il cui integrale non si può esibire con un numero finito di termini. Intanto se pongasi $\mathrm{L}.x=\frac{z}{m}$, si ha $x=e^{\frac{z}{m}}$, ed $x^m=e^z$. Il perchè dev' essere pure $mx^{m-1}dx=e^z\,dz$, ed $x^{m-1}dx=\frac{e^z dz}{m}$. E perciò la formola $\frac{x^{m-1}dx}{\mathrm{L}.x}$ si riduce ad $\frac{e^z dz}{z}$. Ma e^z (§. 54.) pareggia la serie

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\text{ec.}$$

Dunque dev' essere

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\mathrm{L}.x} = \int\left(\frac{dz}{z} + dz + \frac{zdz}{2} + \frac{z^2dz}{2.3} + \text{ec.}\right)$$

$$= \mathrm{L}.z + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2.3.3} + \text{ec.} + \mathrm{C},$$

e ponendo $m\mathrm{L}.x$ in luogo di z, si ha

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\mathrm{L}\,x} = \mathrm{L}.(m\mathrm{L}.x) + m\mathrm{L}.x + \frac{m^2\overline{\mathrm{L}.x}^2}{4} + \frac{m^3\overline{\mathrm{L}.x}^3}{2.3.3} + \text{ec} + \mathrm{C}.$$

PROP. XXII. PROBL.

§. 199. *Supposto che* X *ne dinoti una qualunque funzione della variabile* x *; esporre i metodi, che vi sono per integrare per parti la formola* $a^x X dx$.

Sol. Cas. I. Suppongasi, che sia $\frac{\mathrm{D.X}}{dx} = \mathrm{X}'$, $\frac{\mathrm{D.X}'}{dx} = \mathrm{X}''$, $\frac{\mathrm{D.X}''}{dx} = \mathrm{X}'''$, ec., e che con tal mezzo si pervenga ad una formola $\mathrm{X}^{(n)}$, che multiplicata per $a^x dx$ ne dia l'altra $a^x \mathrm{X}^{(n)} dx$, che si possa facilmente integrare, o che sia la più semplice nel suo genere. Or essendo $\mathrm{D}.a^x = a^x dx \mathrm{L}.a$, dev' essere

$$\int . a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{L}.a}.$$

Il perchè essendo (§. 194)

$$\int . a^x \mathrm{X} dx = \mathrm{X} \int . a^x dx - \int . \left(\int . a^x dx\right) d\mathrm{X},$$

sarà pure

$$\int . a^x \mathrm{X} dx = \mathrm{X} \frac{a^x}{\mathrm{L}.a} - \frac{1}{\mathrm{L}.a} \int a^x d\mathrm{X},$$

e ponendo $X'dx$ in luogo di dX, si avrà pure

$$\int . a^x X dx = \frac{a^x X}{L.a} - \frac{1}{L.a} \int . a^x X' dx \ . \ . \ . \ (1).$$

Ma integrando per parti la formola $a^x X' dx$, si ha

$$\int . a^x X' dx = X' \int . a^x dx - \int . \left(\int . a^x dx \right) dX' ,$$

cioè

$$\int . a^x X' dx = \frac{a^x X'}{L.a} - \frac{1}{L.a} \int . a^x X'' dx$$

Dunque se nel secondo membro dell'equazione (1) in luogo di $\int . a^x X' dx$ si sostituisca il secondo membro di quest'ultima, si avrà

$$\int . a^x X dx = \frac{a^x X}{L.a} - \frac{a^x X'}{\overline{L.a}^2} + \frac{1}{\overline{L.a}^2} \int . a^x X'' dx.$$

Nello stesso modo si dovrà procedere fino a tanto che si pervenga a far dipendere l' integrale di $a^x X dx$ da quello di un' espressione dell' istessa forma, ma che sia integrabile, o la più semplice nel suo genere.

Cas. II. Suppongasi in secondo luogo, che la formola $a^x X dx$ sia più semplice di ciascuna di queste $a^x X' dx$, $a^x X'' dx$, ec., ma che sia

$$\int . X dx = P \ , \int . P dx = Q \ , \int . Q dx = R, \text{ ec.}$$

Sarà (§. 194)

$$\int . a^x X dx = a^x \int . X dx - \int . \left(\int . X dx \right) a^x dx L.a ,$$

e ponendo P in luogo di $\int . X dx$, si avrà

$$\int . a^x X dx = a^x P - L.a \int . a^x P dx \ . \ . \ . \ (1).$$

Ma integrando per parti la formola $a^x P dx$ si ha

$$\int . a^x P dx = a^x \int . P dx - \int \left(\int . P dx \right) a^x dx L.a ;$$

cioè, ponendo Q in luogo di $\int . P dx$,

$$\int . a^x P dx = a^x Q - L.a \int . a^x Q dx.$$

Dunque se nel secondo membro dell' equazione (1) in luogo di $\int . a^x P dx$ si ponga il secondo membro di quest' ultima, si avrà

$$\int . a^x X dx = a^x P - a^x Q.La + \overline{L.a}^2 \int . a^x Q dx.$$

E continuando nello stesso modo si perverrà finalmente ad una formola integrabile, ovvero ad un' altra, che sarà la più semplice nel suo genere. C.B.D.

Esempio I. *Esibire l' integrale della formola* $a^x x^n dx$, *ove la* n *rappresenta un numero intiero positivo.*

Quì la X n' è dinotata da x^n; ond' essendo $\frac{d.^n x^n}{dx^n}$ uguale ad una quantità costante, gioverà adottare il primo de' due metodi quassù esposti per integrare per parti la formola $a^x x^n dx$. Il perchè dev' essere in primo luogo

$$\int . a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{L.a} - \frac{n}{L.a} \int . a^x x^{n-1} dx \quad . \; . \; . \; (1),$$

Ma ponendo $n-1$ in luogo di n in ciascun membro di questa equazione, si ha

$$\int . a^x x^{n-1} dx = \frac{a^x x^{n-1}}{L.a} - \frac{n-1}{L.a} \int . a^x x^{n-2} dx \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Dunque sostituendo nel secondo membro dell' equazione (1) il valore di $\int . a^x x^{n-1} dx$ ottenuto in quest' ultima equazione, si ha

$$\int . a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{L.a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\overline{L.a}^2} + \frac{n(n-1)}{\overline{L.a}^2} \int . a^x x^{n-2} dx \ldots (3).$$

E quindi se in quest' ultima equazione si sostituisca $n-2$ in luogo di n, si ha

$$\int . a^x x^{n-2} dx = \frac{a^x x^{n-2}}{L.a} - \frac{(n-2) a^x x^{n-3}}{\overline{L.a}^2}$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{\overline{L.a}^2} \int a^x x^{n-4} dx,$$

e sostituendo nell' equazione (3) un tal valore di $\int . a^x x^{n-2} dx$, ne risulta

$$\int . a^x x^n dx = \frac{a^x x^n}{L.a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\overline{L.a}^2} + \frac{n(n-1) a^x x^{n-2}}{\overline{L.a}^3}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2) a^x x^{n-3}}{\overline{L.a}^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\overline{L.a}^4} \int . a^x x^{n-4} dx.$$

Dunque procedendo nello stesso modo, dovrà pervenirsi finalmente ad un integrale, di cui l' ultimo termine avrà per fattore $\int . a^x x^{n-n} dx$, cioè $\int . a^x dx$, ch' è uguale ad $\frac{a^x}{L.a}$; e perciò la proposta formola si può completamente integrare.

Esempio II. *Vogliasi l' integrale del fratto* $\frac{a^x dx}{x^n}$, *ove la* n *ne dinota un numero intiero.*

La X del Teorema precedente n' è quì dinotata da $\frac{1}{x^n}$. Onde siccome $\frac{d^n \frac{1}{x^n}}{dx^n}$ è una funzione più complicata di $\frac{1}{x^n}$, ed altronde l' integrale di $\frac{dx}{x^n}$ adegua

$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, ch'è più semplice di $\frac{1}{x^n}$, gioverà adottare il secondo metodo esposto nel Teorema precedente per integrare per parti la proposta formola. Il perchè dev'essere

$$\int.\frac{a^x dx}{x^n}=\frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{L.a}{n-1}\int.\frac{a^x dx}{x^{n-1}}\ldots(1),$$

e ponendo in questa equazione $n-1$ in luogo di n, si ha

$$\int.\frac{a^x dx}{x^{n-1}}=-\frac{a^x}{(n-2)x^{n-2}}+\frac{L.a}{n-2}\int.\frac{a^x dx}{x^{n-2}},$$

il qual valore di $\int.\frac{a^x dx}{x^{n-1}}$ sostituito nell' equazione (1) ne dà

$$\int.\frac{a^x dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a^x L.a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$
$$+\frac{\overline{L.a}^2}{(n-1)(n-2)}\int\frac{a^x dx}{x^{n-2}},$$

e continuando nello stesso modo si perverrà finalmente a far dipendere l' integrale della proposta formola da quello di $\frac{a^x dx}{x}$, il quale non si può esibire con un numero finito di termini, per esserne l'integrale di $\frac{dx}{x}$ uguale a $L.x$. Ma se nel fratto $\frac{a^x dx}{x}$ in luogo di a^x si ponga la serie (§. 54)

$1+xL.a+\frac{x^2}{2}L.\,a^2+\frac{x^3}{2.3}\overline{L.a}^3+$ec., si avrà

$$\int\frac{a^x dx}{x}=\int\left(\frac{dx}{x}+dx\,L.a+\frac{1}{2}\,xdx\overline{L.a}^2+\frac{1}{2.3}x^2dx\overline{L.a}^3+\text{ec}\right)$$

cioè

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \mathrm{L}.x + x\mathrm{L}.a + \frac{x^2}{4}\overline{\mathrm{L}.a}^2 + \frac{x^3}{18}\overline{\mathrm{L}a}^3 + \text{ec.}$$

PROP. XXIII. TEOR.

§. 200. *Supposto che l'integrale di* Xdx *sia una funzione algebrica della variabile* x, *che per mezzo delle verità precedenti si trovi uguale a* P; *gli integrali delle formole* XdxArc.sen.x, XdxArc.cos. x, XdxArc.tang.x, ec. *dipenderanno tutti dagl' integrali di formole differenziali algebriche.*

Dim. In fatti supposto che sia r il raggio del cerchio, nel quale son presi gli archi, di cui il seno, il coseno, la tangente, ec. n'è dinotata da x, deve essere (§. 194)

$$\int . \mathrm{X}dx\mathrm{Arc.sen}x = \mathrm{P.Arc.sen}x - \int \frac{r\mathrm{P}dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}},$$

$$\int . \mathrm{X}dx.\mathrm{Arc.cos}x = \mathrm{P.Arc.cos}x + \int \frac{r\mathrm{P}dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}},$$

$$\int . \mathrm{X}dx\mathrm{Arc.tang}x = \mathrm{P.Arc.tang}.x - \int . \frac{r^2\mathrm{P}dx}{r^2+x^2}, \text{ ec.}$$

Ma l'espressioni $\frac{r\mathrm{P}dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, $\frac{r^2\mathrm{P}dx}{r^2+x^2}$, ec. sono funzioni differenziali algebriche. Dunque se per mezzo delle precedenti verità si possono determinare gl' integrali di tali espressioni, si avranno quelli delle funzioni differenziali date. C. B. D.

PROP. XXIV. PROBL.

§. 201. *Posto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1; *esibire l' integrale di* $d\varphi\overline{\mathrm{sen}\varphi}^n$, *ove* n *ne dinoti un numero intiero positivo.*

Sol. Essendo $d\varphi\overline{\mathrm{sen}\varphi}^n = d\varphi\mathrm{sen}\varphi.\overline{\mathrm{sen}\varphi}^{n-1}$; integrando per parti il secondo membro di questa equazione, si ha

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} = \overline{\text{sen}\varphi}^{n-1} \int . d\varphi \text{sen}\varphi - \int \left(\int d\varphi \, \text{sen}\varphi \right) d . \overline{\text{sen}\varphi}^{n-1}$$

cioè

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} = -\overline{\text{sen}\varphi}^{n-1} \cos\varphi + (n-1) \int \overline{\cos\varphi}^{2} d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-2},$$

Ma $\overline{\cos\varphi}^{2}$ pareggia $1 - \overline{\text{sen}\varphi}^{2}$. Dunque sostituendo un tal valore di $\overline{\cos\varphi}^{2}$ nel secondo membro dell' ultima equazione, si ha

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} = -\overline{\text{sen}\varphi}^{n-1} \cos\varphi + (n-1) \int d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-2}$$

$$-(n-1) \int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} .$$

E trasportando nel primo membro il terzo termine del secondo membro, e dividendo per n l' equazione, che ne risulta, si ottiene

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} = \frac{-1}{n} \overline{\text{sen}\varphi}^{n-1} \cos\varphi + \frac{n-1}{n} \int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-2} \ldots (1)$$

Il perchè se in quest' ultima equazione si ponga $n-2$ in luogo di n, si ha

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-2} = -\frac{1}{n-2} \overline{\text{sen}\varphi}^{n-3} \cos\varphi + \frac{n-3}{n-2} \int . d\varphi \, \overline{\text{sen}\varphi}^{n-4},$$

e sostituendo questo valore di $\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-2}$ nel secondo membro dell' equazione (1), si ottiene

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n} = \frac{-1}{n} \overline{\text{sen}\varphi}^{n-1} \cos\varphi - \frac{n-1}{n(n-2)} \overline{\text{sen}\varphi}^{n-3} \cos\varphi$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \int d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n-4}$$

Nello stesso modo procedendo innanzi si perverrà finalmente ad esibire l' integrale di $d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{n}$ per una formola, di cui l' ultimo termine nel caso di n pari avrà per fattore $\int d\varphi$, o sia φ; e nel caso di n dis-

pari avrà per fattore $\int . d\varphi \operatorname{sen}\varphi$, cioè $-\cos\varphi$. Dunque la formola $d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^n$ è sempre integrabile in un numero finito di termini. C. B. F.

§. 202. *Cor.* Supposto che n dinoti un numero intiero positivo; se pongasi l'arco Ψ uguale a $90^o - \varphi$, si ha $d\Psi = -d\varphi$, $\cos\Psi = \operatorname{sen}\varphi$, e $\overline{\cos\Psi}^n = \overline{\operatorname{sen}\varphi}^n$. Il perchè dev'essere $d\Psi \overline{\cos\Psi}^n = -d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^n$. Dunque se nell'integrale di $d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^n$ (§. 201) preso col segno cangiato si ponga $90^o - \Psi$ in luogo di φ, si avrà l'integrale di $d\Psi \overline{\cos\Psi}^n$.

PROP. XXV. PROBL.

§. 203. *Supposto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1 *; esibire in che modo si pervenga ad integrare il monomio* $d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^n$ *, ove* m *ed* n *sono numeri intieri positivi.*

Sol. E poichè l'è $d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^n = \overline{\cos\varphi}^{n-1} d\varphi \cos\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m$, integrando per parti rispetto a $d\varphi \cos\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m$, si dee avere

$$\int . d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^n = \frac{1}{m+1} \overline{\cos\varphi}^{n-1} \overline{\operatorname{sen}\varphi}^{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int . d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^{m+2} \overline{\cos\varphi}^{n-2} .$$

E quindi se nel secondo membro di quest'ultima equazione si ponga $\overline{\operatorname{sen}\varphi}^m (1 - \overline{\cos\varphi}^2)$ in luogo di $\overline{\operatorname{sen}\varphi}^{m+2}$, si ottiene

$$\int . d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^n = \frac{1}{m+1} \overline{\cos\varphi}^{n-1} \overline{\operatorname{sen}\varphi}^{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^{n-2} - \frac{n-1}{m+1} \int d\varphi \overline{\operatorname{sen}\varphi}^m \overline{\cos\varphi}^n ,$$

e trasportando nel primo membro l' ultimo termine del secondo membro, e dividendo l' equazione, che ne risulta per $1+\frac{n-1}{m+1}$, o sia per $\frac{m+n}{m+1}$, ne risulta

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n} = \frac{1}{m+n} \overline{\cos\varphi}^{n-1} \overline{\text{sen}\varphi}^{m+1}$$
$$+\frac{n-1}{m+n}\int d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n-2} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Ma se in quest' ultima equazione si ponga $n-2$ in luogo di n, si ottiene

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n-2} = \frac{1}{m+n-2} \overline{\cos\varphi}^{n-3} \overline{\text{sen}\varphi}^{m+1}$$
$$+\frac{n-3}{m+n-2}\int d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n-4}$$

Dunque sostituendo nel secondo membro dell'equazione (1) il secondo membro di quest'ultima in luogo di $\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n-2}$, si ha

$$\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n} = \frac{1}{m+n} \overline{\cos\varphi}^{n-1} \overline{\text{sen}}^{m+1}$$
$$+\frac{(n-1)}{(m+n)(m+n-2)} \overline{\cos\varphi}^{n-3} \overline{\text{sen}\varphi}^{m+1}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+n-2)}\int d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n-4} :$$

Nello stesso modo procedendo innanzi si perverrà finalmente ad esibire l' integrale della proposta formola per un' altra, di cui l' ultimo termine nel caso di n pari avrà per fattore $\int . d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m}$, che si può facilmente esibire (§. 201.), e nel caso di n dispari quell' ultimo termine avrà per fattore $\int . d\varphi \cos\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m}$, il cui integrale pareggia $\frac{\overline{\text{sen}\varphi}^{m+1}}{m+1}$. Dunque l' inte-

grale della formola $d\varphi \overline{\text{sen}\varphi}^{m} \overline{\cos\varphi}^{n}$ conterrà sempre un numero finito di termini. C. B. F.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 204. *Supposto che il raggio trigonometrico sia uguale ad* 1; *esporre in che modo si pervenga ad integrare il fratto* $\frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos\alpha}$, *ove* m *ne dinoti un qualunque numero intiero positivo.*

Sol. Il proposto fratto è lo stesso che il prodotto di $\frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1}}{\cos\alpha}$ per $d\alpha\text{sen}\alpha$, e l'integrale di $d\alpha\text{sen}\alpha$ pareggia $-\cos\alpha$. Dunque integrando per parti quel prodotto rispetto a $d\alpha\text{sen}\alpha$, dee risultarne

$$\int . d\alpha \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1}}{\cos\alpha} \times -\cos\alpha$$

$$+\int . \cos\alpha \left(\frac{(m-1)\overline{\cos\alpha}^{2}\,\overline{\text{sen}\alpha}^{m-2}\,d\alpha + \overline{\text{sen}\alpha}^{m}\,d\alpha}{\overline{\cos\alpha}^{2}} \right) = -\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1}$$

$$+(m-1)\int \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-2}\,\overline{\cos\alpha}^{2}\,d\alpha}{\cos\alpha} + \int \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m}\,d\alpha}{\cos\alpha},$$

e ponendo $1-\text{sen}^2\alpha$ in luogo di $\overline{\cos}^2\alpha$ nel secondo termine del secondo membro, si ha

$$\int . \frac{d\alpha\,\overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos\alpha} = -\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1} + (m-1)\int . \frac{\overline{\text{sen}.\alpha}^{m-2}\,d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$-(m-1)\int . \frac{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}\,d\alpha}{\cos.\alpha} + \int \frac{\overline{\text{sen}\,\alpha}^{m}\,d\alpha}{\cos.\alpha},$$

e trasportando nel primo membro i due ultimi termi-

ni del secondo membro, e dividendo tutta l'equazione per $m-1$, si ottiene

$$\int . \frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos.\alpha} = \frac{-1}{m-1}\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m-1} + \int \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-2}\, d\alpha}{\cos\alpha} \ldots (1)$$

Ma ponendo $m-2$ in luogo di m in ciascun membro di quest' ultima equazione, si ha

$$\int \frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m-2}}{\cos\alpha} = -\frac{1}{m-3}\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m-3} + \int \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-4}\, d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Dunque sostituendo nell' equazione (1) questo valore di $\int . \frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m-2}}{\cos\alpha}$, dev' essere

$$\int \frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos\alpha} = -\frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-1}}{m-1} - \frac{\overline{\text{sen}\alpha}^{m-3}}{m-3} + \int \frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m-4}}{\cos\alpha}$$

Nello stesso modo procedendo, si potrà pervenire a far dipendere l' integrale della data formola dall' integrale di $\frac{d\alpha}{\cos.\alpha}$ nel caso di m pari, e da quello di $\frac{d\alpha\,\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ nel caso di m dispari. Ma l' integrale (§. 186) di $\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$ pareggia $\frac{1}{2}\, L\left(\frac{1+\text{sen}\alpha}{1-\text{sen}\alpha}\right)$, e quello di $\frac{d\alpha\,\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ (§. 161) adegua $-L.\cos\alpha$. Dunque la data formola si può completamente integrare. C. B. F.

§. 205. *Cor.* Suppongasi, che l' angolo α sia uguale a $90^{o}-\beta$. Dev' essere $\text{sen}\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \text{sen}\beta$, e $d\alpha = -d\beta$. E quindi la formola $\frac{d\beta\, \overline{\cos\beta}^{m}}{\text{sen}\beta}$ dee pareggiare $-\frac{d\alpha\, \overline{\text{sen}\alpha}^{m}}{\cos\alpha}$. Ma l' integrale di quest' ultima formola si

può esibire con un numero finito di termini. Dunque se in tale integrale si ponga $90^o-\beta$ in luogo di α si avrà l'integrale di $\frac{d\beta \cos\beta^m}{\text{sen}\beta}$.

CAP. VII.

APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE ALLA RETTIFICAZIONE DELLE LINEE CURVE, ALLA QUADRATURA DELLE SUPERFICIE, ED ALLA CUBATURA DE' SOLIDI DI RIVOLUZIONE.

PROP. XXVII. TEOR.

§. 206. *Se* x *ed* y *ne dinotino rispettivamente le coordinate ortogonali di una curva qualunque, dalla cui equazione rispetto all' asse delle* x *si rilevi esserne* $dy=Xdx$; *un arco qualunque* s *di tal curva ne sarà dinotato dalla differenza de' due valori, che l'integrale di* $dx\sqrt{(1+X^2)}$ *si acquista al porvisi in luogo di* x *ora l'ascissa, che corrisponde ad un estremo dell' arco* s, *ed ora quella, che corrisponde all' altro estremo.*

Dim. E poichè dy adegua Xdx, dev'essere $dy^2=X^2dx^2$; e quindi il differenziale ds dell' arco s essendone generalmente dinotato (§. 139) da $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ potrà pure designarsi per $\sqrt{(dx^2+X^2dx^2)}$, e portando il fattore dx^2 fuori del segno radicale, si avrà

$$ds=dx\sqrt{(1+X^2)};$$

e quindi $$s=\int dx\sqrt{(1+X^2)}+C. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Or se l'arco s si computi da quel punto della curva, nel quale l'ascissa, che vi corrisponde, sia uguale ad a, e termini in quell'altro punto della curva, ove l'ascissa, che vi corrisponde, sia uguale a c; l'è chiaro, che ponendo nell'equazione (1) a in luogo di x, debba farsi $s=0$; e quindi dev'essere zero uguale a ciò che ne diviene l'integrale di $dx\sqrt{(1+X^2)}$ al porvisi

a per x, aggiuntavi la costante C. Ma posto a per x in quell'integrale, esso acquista un valore determinato, che può dinotarsi con A. Dunque dev' essere

$$A+C=0,$$

e quindi $$C=-A.$$

In oltre, se nell' equazione (1) in luogo di x si ponga c, e per la debita costante C vi si sostituisca $-A$; si avrà s uguale a ciò che ne diviene l' integrale di $dx\sqrt{(1+X^2)}$ al porvisi c per x, diminuito di A, o sia del valore che si acquista lo stesso integrale al porvisi a per x. Dunque ec. C. B. D.

Esempio. Diasi l'equazione $py^2=x^3$ *della seconda parabola cubica; determinare l' arco di tal curva, che trovasi tra le semiordinate corrispondenti alle ascisse* a *e* c.

Dall' equazione $py^2=x^3$ della proposta curva si ha

$y=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, e $dy=\frac{3x^{\frac{1}{2}}dx}{2p^{\frac{1}{2}}}$. Dunque dev' essere

$dy^2=\frac{9xdx^2}{4p}$; e quindi $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{\left(1+\frac{9x}{4p}\right)}$.

Il perchè se con s si dinoti un arco di essa curva, dev' essere

$$s=\int dx\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}+C \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Intanto (§. 167) si ponga $1+\frac{9x}{4p}=z$; dev'essere

$\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}$, e $dx=\frac{4pdz}{9}$. E sostituendo questi valori nell'equazione (1), essa si trasforma nella seguente

$$s=\frac{4p}{9}\int . \, z^{\frac{1}{2}}dz+C,$$

o sia nell' altra

$$s=\frac{8p}{27}z^{\frac{3}{2}}+C.$$

Ma $z^{\frac{3}{2}}$ adegua $\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}$. Dunque dev'essere

$$s=\frac{8p}{27}\left(1+\frac{9x}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}+C \quad . \; . \; . \; (2)$$

Or poichè l'arco, che si vuol rettificare incomincia da quel punto della curva, al quale corrisponde l'ascissa $x=a$; dev' essere in tal punto $s=o$. E perciò se nell'equazione (2) si ponga o per s, ed a per x, si ha

$$o=\frac{8p}{27}\left(1+\frac{9a}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}+C,$$

e

$$C=-\frac{8p}{27}\left(1+\frac{9a}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ma lo stesso arco termina in quel punto della curva, al quale corrisponde l'ascissa $x=c$. Dunque se nel secondo membro dell'equazione (2) si ponga c per x, e $-\frac{8p}{27}\left(1+\frac{9a}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}$ per C; si avrà l'arco della proposta curva intercetto tra le semiordinate corrispondenti alle ascisse a e c uguale ad

$$\frac{8p}{27}\left(\left(1+\frac{9c}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{9a}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

PROP. XXVIII. TEOR.

§. 207. *Se* x *ed* y *ne dinotino le coordinate ortogonali di una curva, la cui equazione sia* y=X; *il quadrilatero terminato dalle semiordinate corri-*

spondenti alle ascisse a *e* c, *dalla differenza di queste ascisse, e dall' arco intercetto da quelle semiordinate, sarà quanto la differenza dei valori, che l' integrale di* Xdx *si acquista al porvisi ora la* x *uguale ad* a, *ed ora la* x *uguale a* c.

Dim. Poichè (§. 154.) l'elemento dS dell' aja di una curva qualunque terminata dalle coordinate ortogonali x ed y, e dall'arco vien dinotato da $y\,dx$, ed è $y=X$; dev' essere $dS=Xdx$; e quindi

$$S=\int Xdx+C. \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Or se l' ascissa a sia minore dell' altra c, ponendo nella precedente equazione $x=a$, dee sparire il primo membro S di essa; e quindi si ha *zero* uguale a C aggiuntovi ciò che ne diviene l' integrale di Xdx, al porvisi a per x. Ma posto a per x nell' integrale di Xdx, questo si acquista un valore determinato, che può dinotarsi con A^2. Dunque dev' essere

$$C+A^2=0,$$

e quindi $$C=-A^2.$$

In oltre se nell' equazione (1) si ponga c per x, e Per la debita costante vi si sostituisca $-A^2$; si avrà la superficie del proposto quadrilatero uguale a ciò che ne diviene l' integrale di Xdx al porvisi c per x, diminuito di A^2. Dunque il proposto quadrilatero adegua ec. C. B. D.

Esempio. Supposto che p *ne dinoti il parametro principale di una parabola conica; determinare l' aja di quel quadrilatero di tal parabola terminato dalle semiordinate all' asse corrispondenti alle ascisse* a *e* c, *dall'arco intercetto dalle medesime semiordinate, e dalla differenza* c−a *di quelle ascisse.*

Si dinoti con y una qualunque semiordinata all' asse della data parabola. Sarà per la natura di tal curva $y^2=px$, ed $y=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$. E quindi dovrà essere

$$dS=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx,$$

ed integrando si avrà

$$S=\frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}+C \ldots (1).$$

Ma ponendo in quest' ultima equazione $x=a$, si ottiene

$$o=\frac{2p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{3}+C.$$

Dunque dev' essere

$$C=-\frac{2p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Il perchè se nel secondo membro dell' equazione (1) si ponga $-\frac{2p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{3}$ in luogo di C, e c in luogo di x; dee risultarne l'aja addimandata uguale a

$$\frac{2p^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}{3}$$

cioè uguale a

$$\frac{2}{3}\left(c\sqrt{pc}-a\sqrt{pa}\right)$$

PROP. XXIX. TEOR.

§. 208. *Poste le medesime cose della Prop. prec., se con* r : p *si dinoti il rapporto del raggio di un cerchio alla sua periferia, con* X'dx *il differenziale di* y, *e la proposta curva si aggiri intorno al suo asse; la superficie generata dall' arco di tal curva intercetto dalle semiordinate corrispondenti alle ascisse* a *e* c, *sarà quanto la differenza de' va-*

lori, che l'integrale di $\frac{pXdx\sqrt{(1+X'^2)}}{r}$ *si acquista al porvisi ora la* x *uguale ad* a, *ed ora la* x *uguale a* c.

Dim. Poichè (§. 154.) l'elemento dG di una superficie di rivoluzione pareggia $\frac{py\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{r}$, ed è $y=X$, e $dy=X'dx$, dev'essere pure

$$dG=\frac{pX\sqrt{(dx^2+X'^2dx^2)}}{r},$$

o sia $$dG=\frac{pXdx\sqrt{(1+X'^2)}}{r},$$

ed integrando si ottiene

$$G=\frac{p}{r}\int Xdx\sqrt{(1+X'^2)}+C. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Or se l'ascissa a sia minore dell'altra c, ponendo in quest'ultima equazione a in luogo di x, dee sparire il primo membro di essa, e'l secondo membro si dovrà ridurre alla costante C aggiuntovi il prodotto di $\frac{p}{r}$ pel valore, che si acquista l'integrale di $Xdx\sqrt{(1+X'^2)}$ al porvisi a per x, e che potrà dinotarsi con A^2. Dunque dev'essere

$$o=\frac{p}{r}A^2+C;$$

e quindi $$C=-\frac{p}{r}A^2.$$

Il perchè se nell'equazione (1) in luogo della debita costante C si ponga $-\frac{pA^2}{r}$, e nell'integrale di $Xdx\sqrt{(1+X'^2)}$ si sostituisca c in luogo di x; ne dovrà risultare la superficie della proposta armilla ugua-

le al prodotto di $\frac{p}{r}$ per ciò che ne diviene

$$\int X dx \sqrt{(1+X'^2)}$$

ponendovi c per x, diminuito di $\frac{pA^2}{r}$. C. B. D.

Esempio. Supposto che m *ne dinoti il parametro principale di una parabola conica, la quale si aggiri intorno al suo asse; determinare la superficie generata dall' arco di tal parabola intercetto dalle semiordinate corrispondenti alle ascisse* a *e* c.

Quì l' è $y=\sqrt{mx}$, e con ciò $dy^2=\frac{m^2dx^2}{4mx}=\frac{mdx^2}{4x}$.

Dunque dev' essere $X=\sqrt{mx}$, ed $X'^2=\frac{m}{4x}$. Il perchè sostituendo nell' equazione (1) della Prop. prec. per X ed X'^2 i loro valori, si ottiene

$$G=\frac{p}{r}\int dx\sqrt{mx}\sqrt{\left(1+\frac{m}{4x}\right)}+C,$$

e facendo le convenevoli riduzioni, si ottiene

$$G=\frac{p}{2r}\int dx\,(m^2+4mx)^{\frac{1}{2}}+C. \ldots (1)$$

Intanto (§. 167) si ponga $m^2+4mx=z$. Dev' essere $(m^2+4mx)^{\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}$, e $dx=\frac{dz}{4m}$. Il perchè l' equazione (1) si trasforma nella seguente

$$G=\frac{p}{2r}\int\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{4m}+C,$$

o sia nell' altra

$$G=\frac{p}{r}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{12m}+C=\frac{pz^{\frac{3}{2}}}{12mr}+C,$$

E ponendo nel secondo membro di quest'ultima equazione $(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}$ in luogo di $z^{\frac{3}{2}}$, si ha

$$G=\frac{p(m^2+4mx)^{\frac{3}{2}}}{12mr}+C. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ma ponendo a per x in quest'ultima equazione, si ha

$$0=\frac{p(m^2+4ma)^{\frac{3}{2}}}{12mr}+C.$$

Dunque dev'essere $C=-\frac{p(m^2+4ma)^{\frac{3}{2}}}{12mr}$. Il perchè se nel secondo membro dell'equazione (2) si ponga c in luogo di x, e $-\frac{p(m^2+4ma)^{\frac{3}{2}}}{12mr}$ per la debita costante C, si ottiene la superficie della proposta armilla uguale a

$$\frac{p(m^2+4mc)^{\frac{3}{2}}}{12mr}-\frac{p(m^2+4ma)^{\frac{3}{2}}}{12mr}.$$

PROP. XXX. TEOR.

§. 209. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, nella rivoluzione della proposta curva intorno al suo asse, il solido generato dal quadrilatero terminato dalle due semiordinate corrispondenti alle ascisse* a *e* c, *dall'arco intercetto dalle medesime semiordinate, e dalla differenza di quelle ascisse, sarà quanto la differenza de'valori, che l'integrale di* $\frac{pX^2dx}{2r}$ *si acquista al porvisi ora la* x *uguale ad* a, *ed ora la stessa* x *uguale a* c.

Dim. Poichè l'elemento dV di un solido di ri-

voluzione (§. 154) pareggia $\frac{py^2dx}{2r}$, ed è $y^2=X^2$; dev' essere

$$dV=\frac{pX^2dx}{2r},$$

ed integrando si ottiene

$$V=\frac{p}{2r}\int X^2dx+C \ldots (1)$$

Or se l' ascissa a sia minore dell' altra c, ponendo in quest' ultima equazione a in luogo di x, dee sparire il primo membro di essa, e 'l secondo membro si dee ridurre alla costante C aggiuntovi il prodotto di $\frac{p}{2r}$ pel valore, che si acquista l' integrale di X^2dx al porvisi a per x, e che potrà dinotarsi con A^3. Dunque dev' essere

$$o=\frac{pA^3}{2r}+C;$$

e quindi $$C=-\frac{pA^3}{2r}.$$

Il perchè se nell' equazione (1) in luogo della debita costante C si ponga $-\frac{pA^3}{2r}$, e nell'integrale di X^2dx si sostituisca c in luogo di x; ne dovrà risultare il solido generato dal proposto quadrilineo uguale al prodotto di $\frac{p}{2r}$ per ciò che ne diviene l' integrale di X^2dx ponendovi c in luogo di x, diminuendo un tal prodotto di $\frac{pA^3}{2r}$. C. B. D.

Esempio. Diasi l' equazione $my^2=x^3$ *della se-*

conda parabola cubica, la quale si concepisca rivolgersi intorno all' asse delle ascisse; determinare il solido generato dal quadrilineo di tal parabola, ch' è terminato dalle semiordinate corrispondenti alle ascisse a *e* c, *dall'arco intercetto dalle stesse semiordinate, e dalla differenza delle ascisse.*

Essendo $my^2=x^3$, dev'essere $y^2=\frac{x^3}{m}$. Ma l'è y^2 uguale ad X^2 del Teorema precedente. Dunque se nell' equazione (1) dello stesso Teorema in luogo di X^2, si sostituisca $\frac{x^3}{m}$, si ottiene

$$V=\frac{p}{2r}\int\frac{x^3dx}{m}+C;$$

cioè

$$V=\frac{px^4}{8mr}+C \ldots (1)$$

E ponendo a per x, quest' ultima equazione si trasforma nella seguente

$$o=\frac{pa^4}{8mr}+C;$$

dalla quale si ha

$$C=-\frac{pa^4}{8mr}.$$

Il perchè se nel secondo membro dell' equazione (1) si ponga $-\frac{pa^4}{8mr}$ in luogo di C, e c in luogo di x; si avrà il valore addimandato uguale a

$$\frac{pc^4}{8mr}-\frac{pa^4}{8mr}$$

FINE.

INDICE

PREFAZIONE. . . . . pag. III

SAGGIO DI CALCOLO SUBLIME

INTRODUZIONE

CAP. I. Delle grandezze variabili, e delle loro funzioni. » 5
CAP. II. Delle grandezze esponenziali, e delle logaritmiche. » 11
CAP. III. Dell' evoluzioni delle funzioni in serie. . . » 16
CAP. IV. Dei rapporti, che tra se serbano i logaritmi dei numeri nei diversi sistemi, e del modo di determinare i logaritmi dei numeri in un qualunque sistema. . . . . » 31
CAP. V. Di alcune trasformazioni di certe formole trascendenti, che contengono quantità immaginarie. » 35
CAP. VI. Del risolvimento delle funzioni fratte nelle loro parziali. . . . . » 39

SAGGIO DI CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAP. I. Delle Differenze finite. . . . . » 54
CAP. II. Del metodo de' limiti. . . . . » 60
CAP. III. De' differenziali delle funzioni di una sola variabile. . . . . » 61
CAP. IV. De' differenziali delle funzioni di più variabili, e de' differenziali secondi, terzi, ec. delle funzioni. » 70
CAP. V. Degli usi principali del Calcolo differenziale . » 77
CAP. VI. Continuazione dello stesso argomento. . . . » 89

SAGGIO DI CALCOLO INTEGRALE.

CAP. I. Nozioni preliminari. . . . . *pag.* 99
CAP. II. Delle integrazioni de' monomii differenziali, e di altre formole, che ne dipendono . . . » 100
CAP. III. Dell' integrazione delle funzioni razionali algebriche fratte. . . . . » 106
CAP. IV. Delle integrazioni di talune funzioni irrazionali. » 113
CAP. V. Delle integrazioni di alcune formole, che contengono quantità circolari. . . . . » 123
CAP. VI. Dell' integrazione per parti. . . . . » 130
CAP. VII. Applicazioni del Calcolo integrale alla rettificazione delle linee curve, alla quadratura delle superficie, ed alla cubatura de' solidi di rivoluzione. . . . . » 146

pag.	verso	ERRORI	CORREZIONI
20	1	$\text{sen}2=x\frac{2\text{sen}x\text{cas}x}{r}$	$\text{sen}2x=\frac{2\text{sen}x\cos x}{r}$
23	19	$-\frac{bx^7}{2rx}$	$-\frac{bx^7}{2r}$
27	10	$-\frac{1}{9^{34}}$	$-\frac{1}{9.3^4}$
32	20	e con ciò $a^{\frac{p}{q}}=b$	e con ciò $a^{\frac{r}{s}}=b$
48	12	$A''(x-a)$	$A''X(x-a)$
53	27	$M'''-A'''-B'''Xx$	$M'''-A'''X-B'''Xx$
60	30	$B\Delta+C\Delta x^2$	$B\Delta x+C\Delta x^2$
68	12	$\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+^2)}}$	$\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+x^2)}}$
73	4	$(x^y dy\text{L}.x^{y-1}ydx)$	$(x^y dy\text{L}.x+x^{y-1}ydx)$
74	8	axy^2 ?	axy^2.
76	7	ad y	ad x
79	7	$\frac{r(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+3rx^2(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2-x^2)^2}$	$\frac{r(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+3rx^2(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(r^2-x^2)^3}$
103	ult.	$\frac{3Aa(a-x)^{\frac{4}{3}}}{2b^3}$	$\frac{3Aa(a-bx)^{\frac{4}{3}}}{2b^3}$
112	9	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$